Pour je : 620.2 620.9 620.10

CCINP savoir faire 620.3 et 620.4

Oral info jeudi : MPI + MPI*

Oral info vendredi : Ballandras

Horard

Soucaze-Soudat

Duret

Tessier

Menci

Anestis

Cherkaoui

Peyrin

Zakkad

Bladehane

Chana-Petit

Analyse asymptotique

1. C'est quoi, l'analyse asymptotique ?

Pour des suites, ce qui se passe à l'infini

comment se comporte la suite

est-ce qu'elle converge

DL, équivalents, o, O . .

Aussi fct

Trouver une fct plus simple qui se rapproche de

celle qu'on étudie.

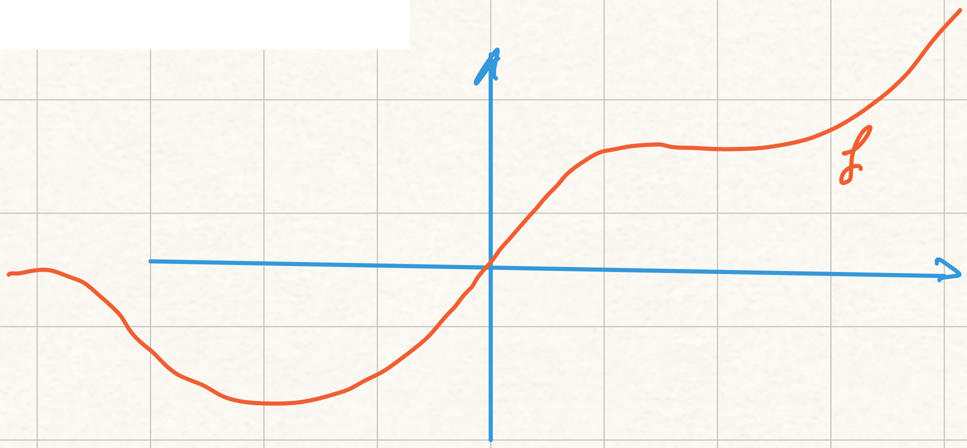
"Remplacer" une fct / suite par une autre

plus simple, mais qui a les m propriétés.

(limite ...)

Travail au voisinage de ...

3. C'est quoi, un $o(1)$?



Calcul asymptotique : "Au voisinage de $x \to 0$"

"Au voisinage de $n \to +\infty$"

Au vois de $x \to 0$: $f(x) = o(1)$ signifie : $f(x) \xrightarrow[(x\to 0)]{} 0$

"est un"

$\cancel{o(1) = f(x)}$

Au vois de $n \to +\infty$, $u_n = o(1)$ $\cancel{(u_n \in o(1))}$

2. Ça veut dire quoi, négligeable ?

Au voisinage de $x \to a$ ($a \in \mathbb{R}$, $a = 0$, $a = +\infty$ ...)

$f(x) = o(g(x))$ signifie $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$

plutôt $f(x) = g(x)\, o(1)$

(ou encore : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tq $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap D_f \cap D_g$ ...

$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$)

5. C'est quoi, un $O(1)$?

Au voisinage de $x \to 0$

$f(x) = O(1)$ signifie f bornée au voisinage de 0

ie : $\exists M$ tq $\exists \alpha$ $\forall x \in]-\alpha, \alpha[,\ |f(x)| \leq M$

Exemple : en $+\infty$, $\frac{\cos x}{x} = \frac{O(1)}{x}$

$$= O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Exemples : Au voi de $x \to +\infty$ $\quad x \sin x$

Au voi de $x \to 0$ $\quad \sin \frac{1}{x}$ / $x \sin \frac{1}{x}$

/ $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ ...

4. Ça veut dire quoi, dominé ?

Au voisinage de $x \to +\infty$

$f(x) = O(g(x))$ signifie $f(x) = g(x)\, O(1)$

ou encore $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ localement bornée

6. On peut faire des opérations sur les petit o ? sur les grand O ?

Au voisinage de $x \to 0$ $\qquad x \qquad x^2 \cos x$

$$x^2 \cos x = x \cdot \underbrace{x \cos x}_{? \to 0 ?}$$

$$= x \cdot x \cdot O(1)$$

$$= x \cdot O(x) \qquad O(x) = o(1)$$

$$= o(x) \qquad = x\, o(1)$$

$$x^3 \sin^2 x = x^2 \cdot x \sin^2 x$$

$$= x^2\, O(x)$$

$$= o(x^2)$$

$$x^2 \cos x = o(x)$$

$$+ \quad x^3 \sin^2 x = o(x^2)$$

$$x^2 \cos x + x^3 \sin^2 x = o(x) + \cancel{o(x^2)}$$

$$o(x^2) \subset o(x)$$

Toute opération raisonnable est légitime.

7. Ça veut dire quoi, équivalent ?

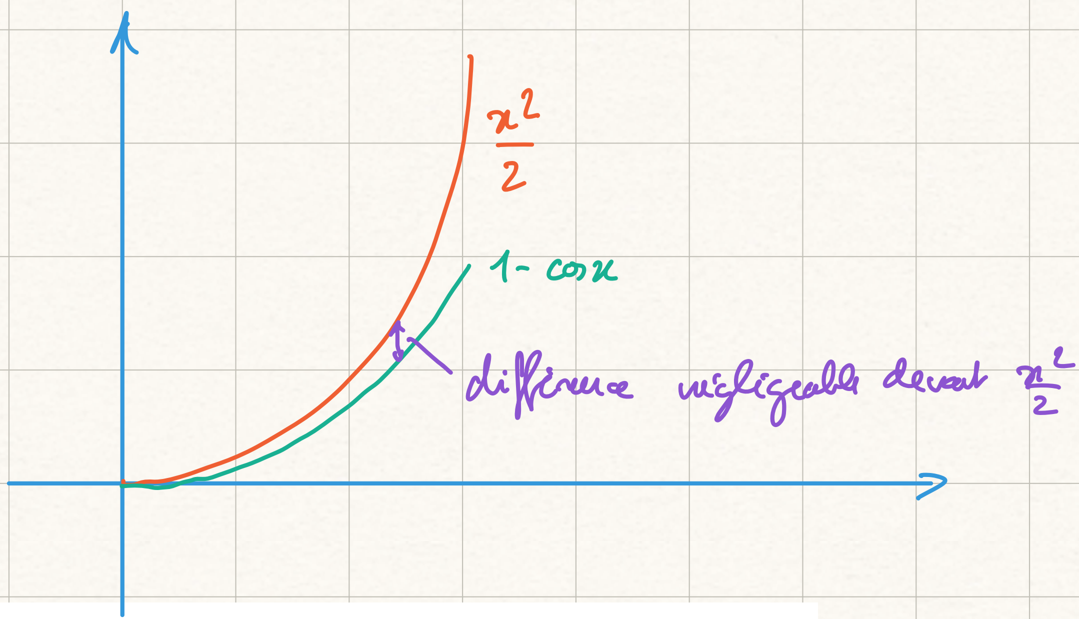
Au voisinage de $x \to a$

$f(x) \sim g(x)$ signifie $\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow 1$ et

ie $f(x) = g(x) + o(g(x))$

$\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$

$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} +$ qqch négligeable $o(x^2)$



8. Est-ce que c'est une relation d'équivalence ?

oui. Réflexive

Symétrique

Transitive

9. On peut faire des opérations sur les équivalents ?

Au voisinage de $x \to a$

Si $f_1(x) \sim g_1(x)$

$f_2(x) \sim g_2(x)$

Alors: $f_1 f_2(x) \sim g_1 g_2(x)$

$\frac{1}{f_1} \sim \frac{1}{g_1}$

On ne peut pas sommer ZUT !

$f_1(x)^\alpha \sim g_1(x)^\alpha$

Composer ? ZUT ! (ln, exp...)

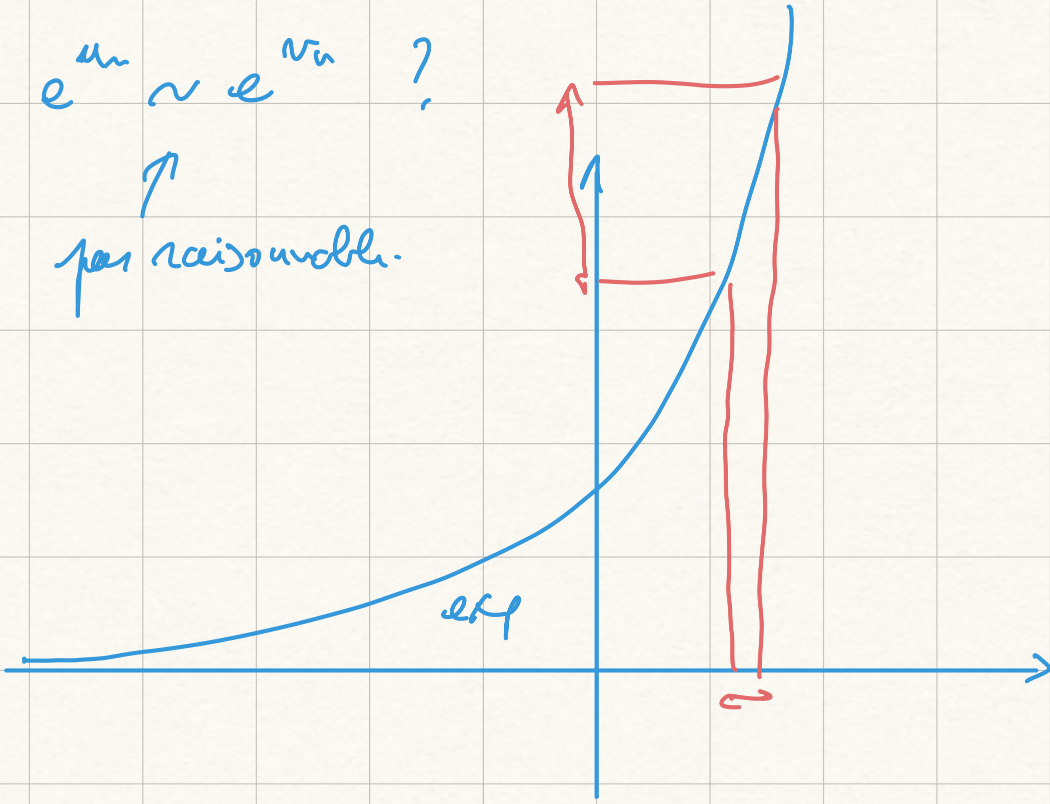
Réfléchissons :

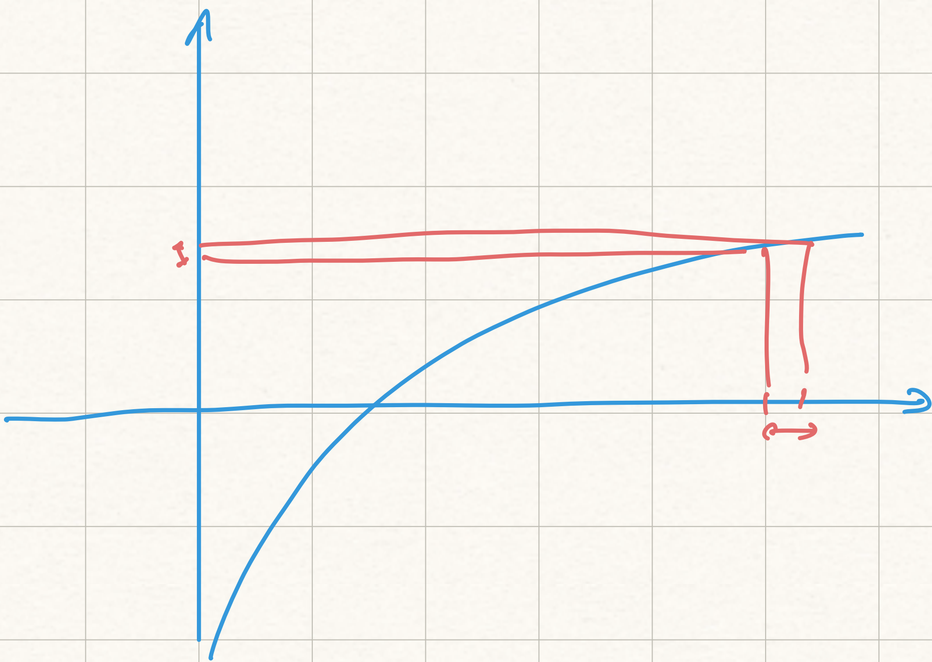
Pour $n \to +\infty$

On suppose $u_n \sim v_n$ et $u_n \to +\infty$

$e^{u_n} \sim e^{v_n}$?

pas raisonnable.





$$\begin{aligned}
\ln(u_n) &= \ln\left(v_n + o(v_n)\right) \\
&= \ln\left(v_n\left[1 + o(1)\right]\right) \\
&= \ln(v_n) + \underbrace{\ln\left(1 + o(1)\right)}_{o(1)}
\end{aligned}$$

$o(\ln(v_n))$ car $v_n \to +\infty$

Factoriser par le terme prépondérant.

$$\begin{aligned}
&= \ln(v_n) + o(\ln(v_n)) \\
&\sim \ln(v_n)
\end{aligned}$$

Et pour la somme ?

Oui on peut sommer, à condition de noter les équivalents avec des $o(..)$ (ce sont des égalités)

11. À quoi servent les équivalents ?

$$\begin{cases} \text{Si } u_n \sim v_n \\ \quad u_n \to \ell \\ \text{Alors } v_n \to \ell \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Si } u_n \sim v_n \\ \quad \sum u_n \text{ cv abs.} \\ \text{Alors } \sum v_n \text{ cv abs.} \end{cases}$$

On utilise ce résultat :

$$\begin{aligned} v_n &= \ldots \\ &\sim \ldots \\ &\sim \ldots \\ &\sim u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \end{aligned}$$

10. Y a-t-il des équivalents usuels ?

Au voisinage de $x \to 0$

$\cos x \sim 1$

$\sin x \sim x$

$e^x \sim 1 + \cancel{x}$ $\quad e^x \sim 1 + \cancel{\frac{x^2}{2}}$

$(1+x)^\alpha \sim 1 + \cancel{\alpha x}$

$\ln(1+x) \sim x$

$\operatorname{Arctan} x \sim x$

$e^x = 1 + x + \underbrace{o(\cancel{1+x})}_{o(1)}$ $\qquad e^x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(1)$

$= 1 + o(1)$ $\qquad = 1 + o(1)$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$

12. Qu'est ce qui se cache derrière l'argument souvent avancé de « croissances comparées » ?

$x \ln x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ par croissances comparées

Théorème: Au voisinage de $x \to +\infty$

$\ln x \ll x \ll e^x$

$(\alpha, \beta > 0$, $a > 1)$ $\quad (\ln x)^{\alpha} \ll x^{\beta} \ll a^{x}$

<u>Au voisinage de $x \to 0$</u>

$$x \ln x = \frac{-\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$\xrightarrow[x \to 0^{>}]{} 0 \quad \text{car} \quad \frac{\ln u}{u} \xrightarrow[u \to +\infty]{} 0$$

<u>Stirling</u>

13. C'est quoi, un développement limité en 0 ?

Au voisinage de $x \to 0$

$x \ln x = x \ln\left(\cancel{1 + (x-1)}\right)$

ne se compare pas à des puissances de x

$\ln(1+u) = u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$

$f(x) = \overbrace{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}^{\text{polynomial}} + o(x^n)$

14. Est-ce qu'un DL donne un équivalent ? un équivalent donne un DL ?

en 0

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

donc $\ln(1+x) = x + o(x)$

$\sim x$

et aussi : $\ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$= -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\sim -\frac{x^2}{2}$

16. Opérations sur les DL ?

$+$ ✓

$\times$ ✓

composer $(\to 0)$ ✓

$\dfrac{1}{f(x)}$ $\quad \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Primitiver

Dériver

$$\frac{1}{2+\cos x} = \frac{1}{3 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

Factoriser par le terme prépondérant

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}$$

$$\frac{1}{1-u} \quad \text{où } u \to 0$$

$$= 1 + u + o(u)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)$$

Primitive ? $\quad \dfrac{1}{1+u}$ où $u \to 0$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$$

donc, par primitivation :

$$\text{Arctan}\, x = \underbrace{\text{Arctan}\, 0}_{0} + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

~~Dérivation~~ :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad + o(x^n)$$

petit, négligeable devant x^n.
Sa dérivée peut être grande

15. Quels sont les DL que l'on doit connaître ?

cf Sup, programme.

17. C'est quoi, un développement limité en a ?

Au voisinage de $x \to a \in \mathbb{R}$

ie $x = a + h$ où $h \to 0$

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + o(h^n)$$

18. C'est quoi, un développement asymptotique ?

en $x \to +\infty$

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \underbrace{ax + b}_{} + \underbrace{\frac{c}{x}}_{} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Au voi de $+\infty$:

$$f(x) = ax^2 + b\, x \ln x + cx + o(x)$$

19. Au voisinage de $n \to +\infty$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \sim$?

20. Donner un exemple de suites telles que $u_n \sim v_n$ mais $\mathrm{e}^{u_n} \not\sim \mathrm{e}^{v_n}$.

21. Est-ce qu'on a toujours $u_{n+1} \sim u_n$?