Pour me : 610.2, 610.12, 610.17 (a)

MPI : anglais le 8 septembre B323

Fonctions usuelles

1.1 Puissances

1. Que sont les fonctions puissances ?
2. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Comment sont-elles définies ?
3. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n = \underbrace{x \times x \ldots \times x}_{n \text{ fois}}$

récurrence

$n \in \mathbb{N}$

$f' : x \mapsto n x^{n-1}$ $n \neq 0$

~~$n \in \mathbb{R}$~~ $\alpha \in \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

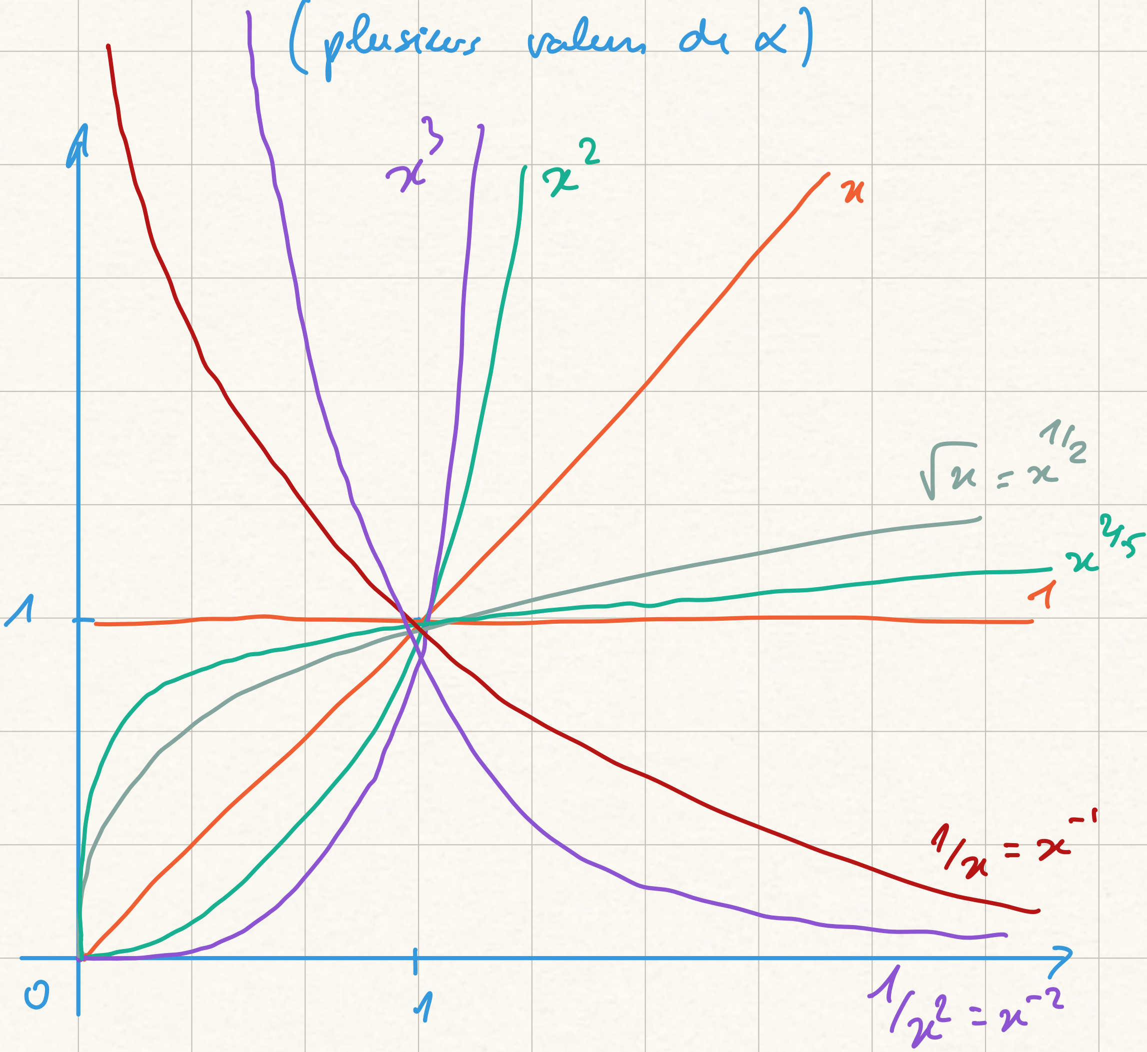
pour $\alpha \in \mathbb{N}$, $x > 0$

$x^n = e^{n \ln x}$

Graphe de $x \mapsto x^\alpha$ $\quad x > 0$

(plusieurs valeurs de α)

$\frac{2}{5} < \frac{1}{2}$



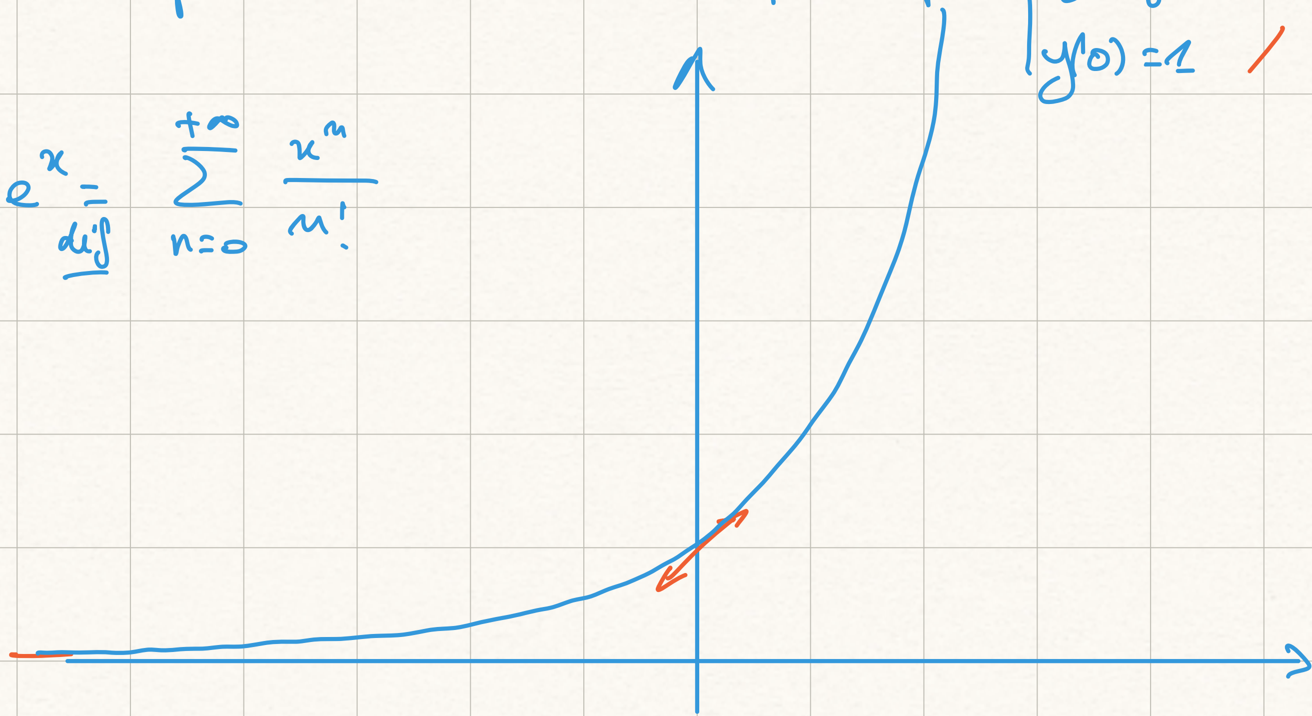
1.2 Exponentielles et logarithmes

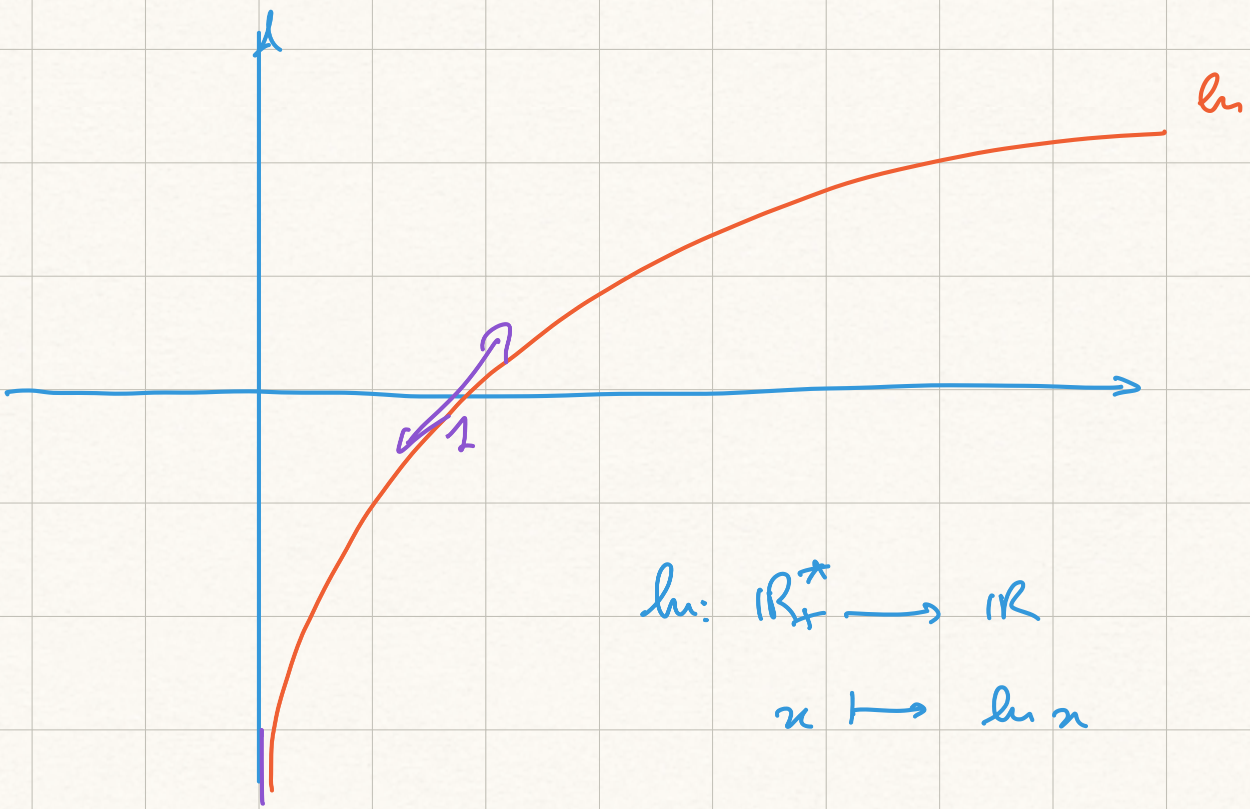
4. Que sont les fonctions exponentielles ? logarithmes ?
5. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Comment sont-elles définies ?
6. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?

$$\exp : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array}$$

$$\exp' = \exp \qquad \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$e^x \underset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$





$$\ln : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln x \end{array}$$

$$\log_2 : x \longmapsto \frac{\ln x}{\ln 2}$$

$$\log_{10} : x \longmapsto \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$\exp_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$x \longmapsto 2^x = e^{x \ln 2}$$

bijection

sa réciproque est $\log_2$

$$\log_2 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$y \longmapsto$ l'unique x tq $y = 2^x$

$\log_2(8) = 3$

$\log_2(1024) = 10$

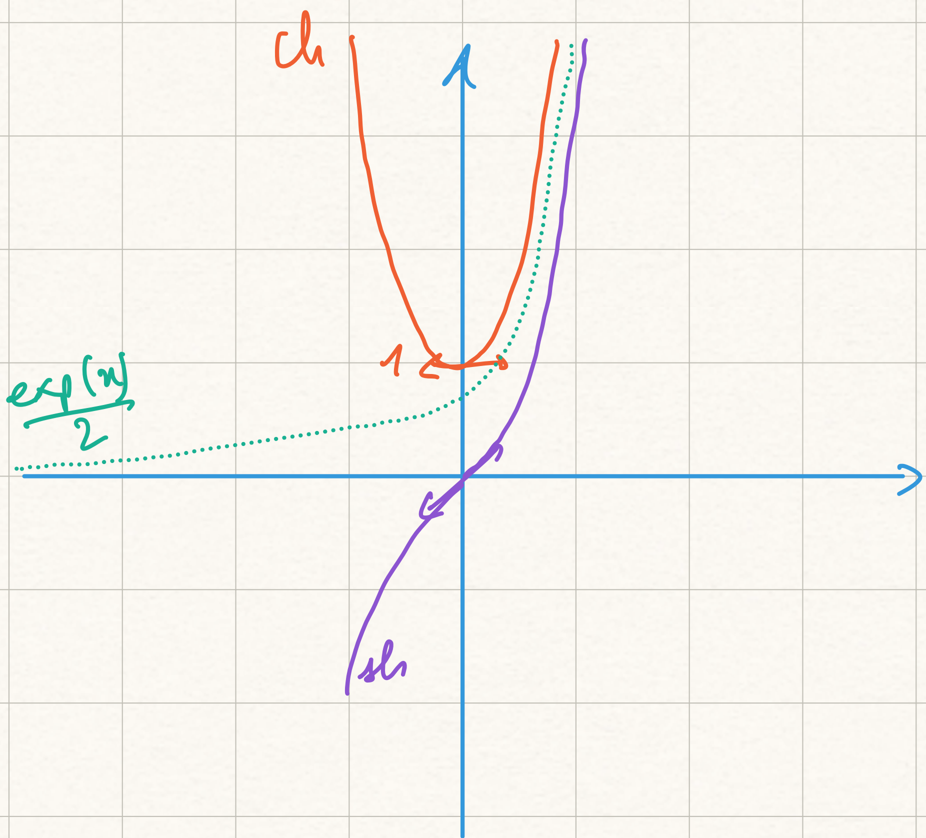
$\log_2(1000) \lessapprox 10$

1.3 Trigonométrie hyperbolique

8. Que sont les fonctions hyperboliques ?
9. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Comment sont-elles définies ?
10. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?
11. Quel est le comportement au voisinage de l'infini ?
12. Il y a un formulaire de trigonométrie hyperbolique ?

$$\mathrm{ch} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$$

$$\mathrm{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$$

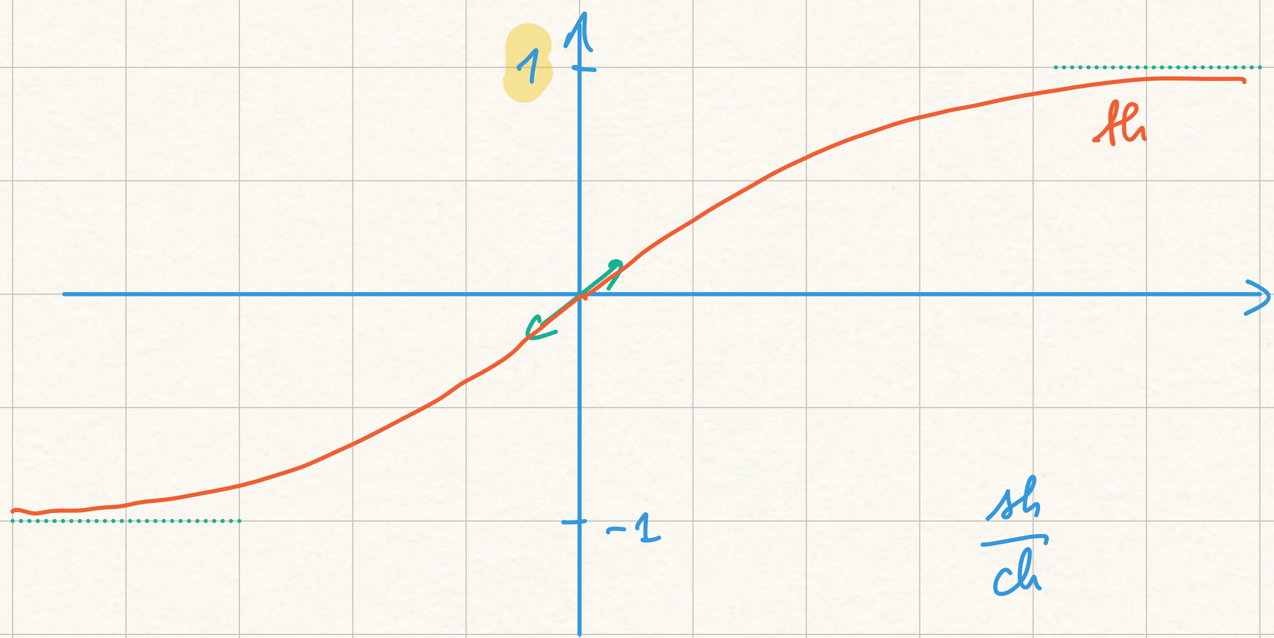


Au vois de $+\infty$: $\mathrm{ch}\, x \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{sh}\, x$

$\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$

$\mathrm{ch}(a+b) = \ldots$

$$\mathrm{th} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$$



$\dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$

$$\mathrm{th}' = \frac{\mathrm{ch}\,\mathrm{ch} - \mathrm{sh}\,\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}^2}$$

$$= 1 - \mathrm{th}^2 = \frac{1}{\mathrm{ch}^2}$$

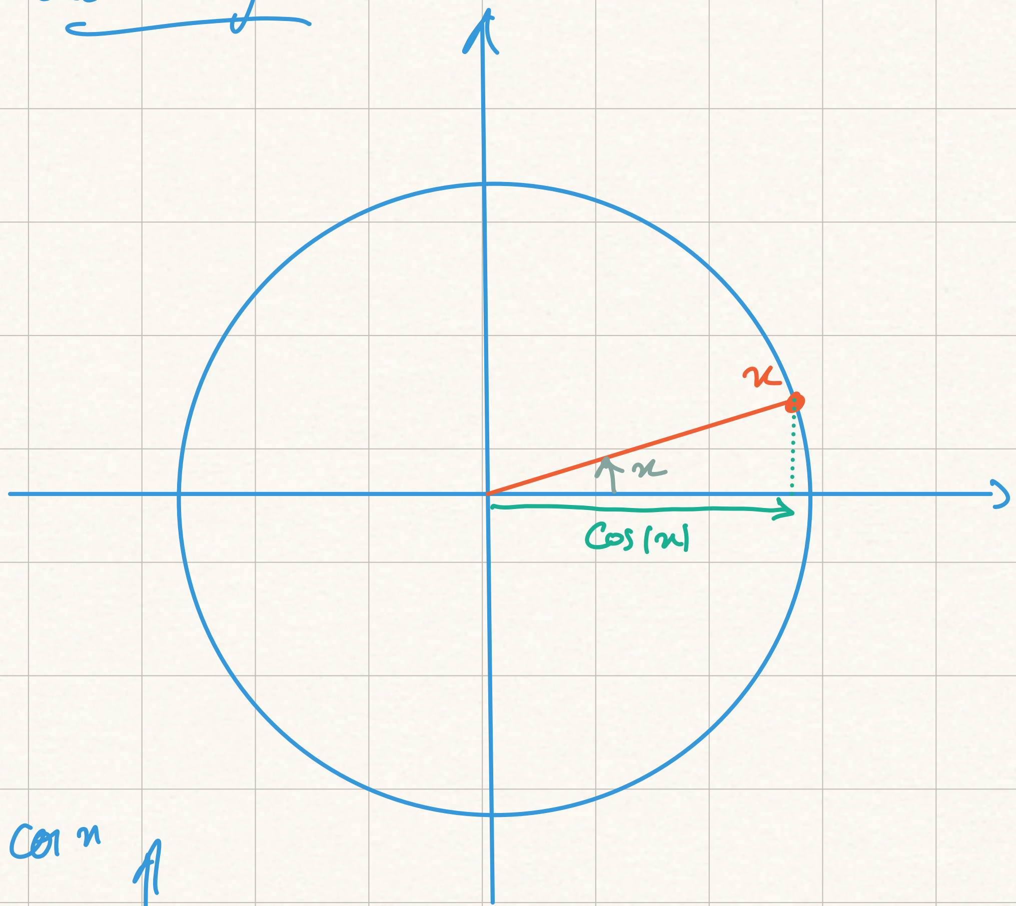
1.4 Trigonométrie circulaire

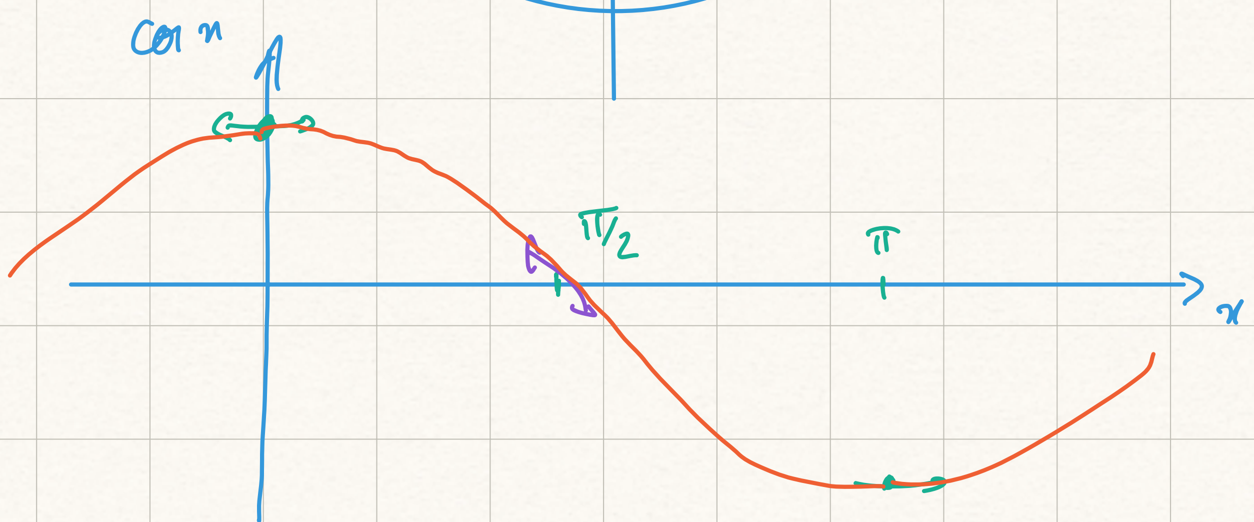
13. Quelles sont les fonctions de trigonométrie circulaire ?
14. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Ont-elles des propriétés remarquables ?
15. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?
16. Comment utiliser le cercle trigonométrique ?
17. Il y a un formulaire de trigonométrie circulaire ?

$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Cercle trigo :





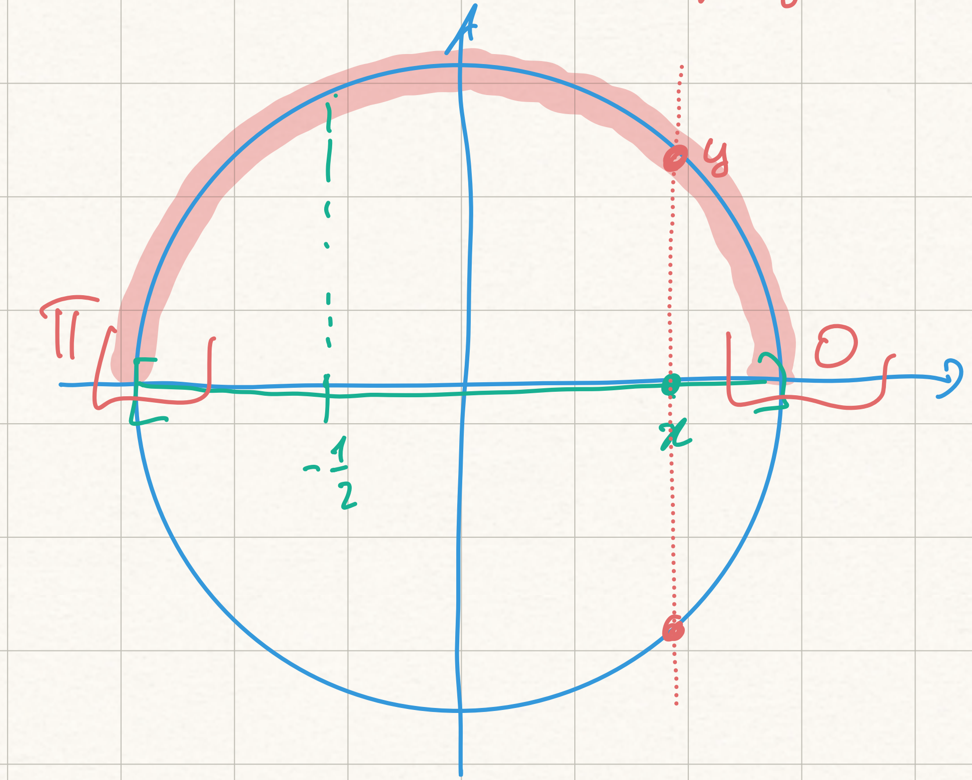
Arccos : ~~fct réciproque~~ du cos

Ben si !

Bof. Plutôt non.

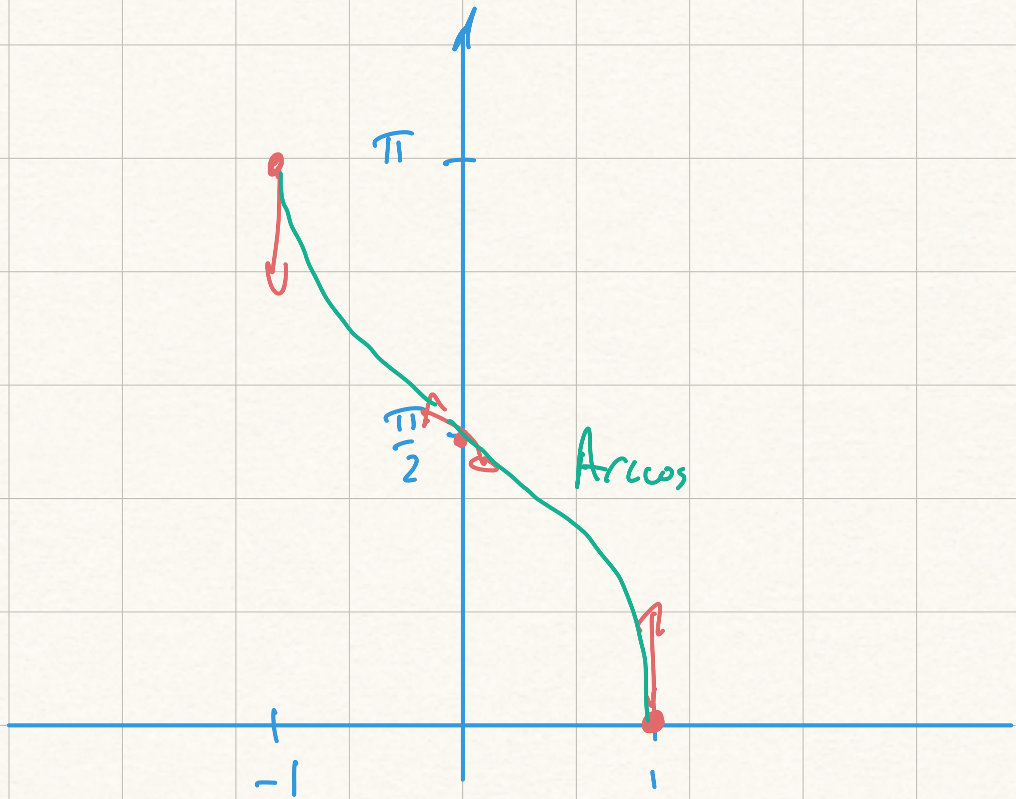
Arccos : $[-1, 1] \longrightarrow \overset{\mathbb{R}}{\cancel{[-\pi, \pi)}}$

$x \longmapsto$ l'unique $y \in [0, \pi]$ tq $x = \cos(y)$



$$\text{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$



Arccos dérivable sur $]-1,1[$

$\mathrm{Arccos}'(x) = \cancel{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \cancel{\sqrt{1-x}}$

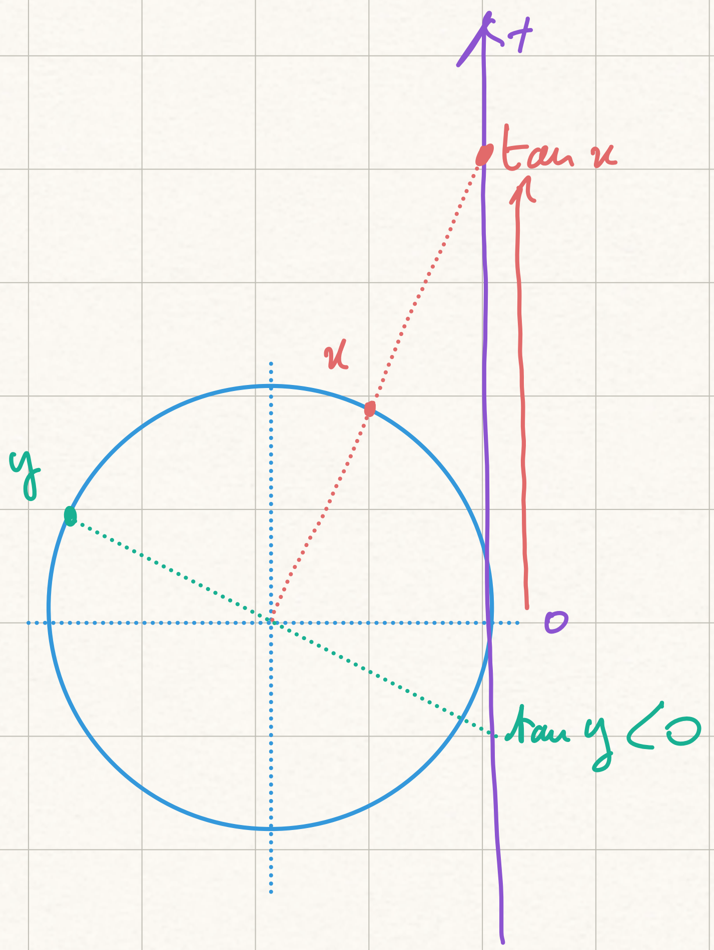
$\cancel{-\sqrt{1-x^2}}$

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

sin, Arcsin ...

$\cos'(x) = -\sin(x)$ $\qquad$ $\sin'(x) = \cos(x)$

tan / Arctan :

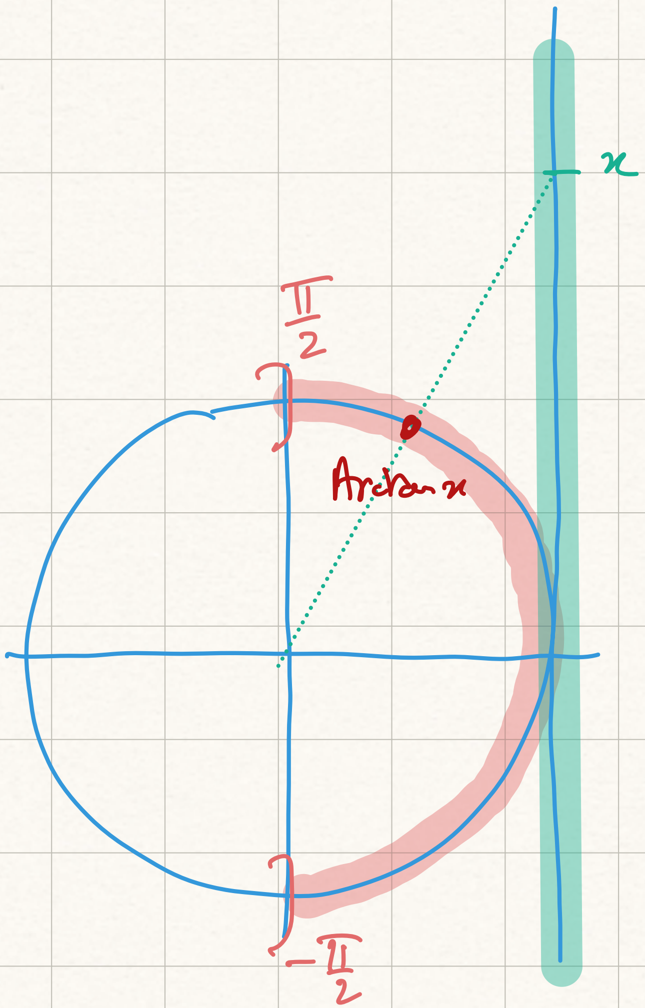


tan π-périodique, déf sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} > 0$

tan ~~croissante sur~~ $\mathcal{D}_f$

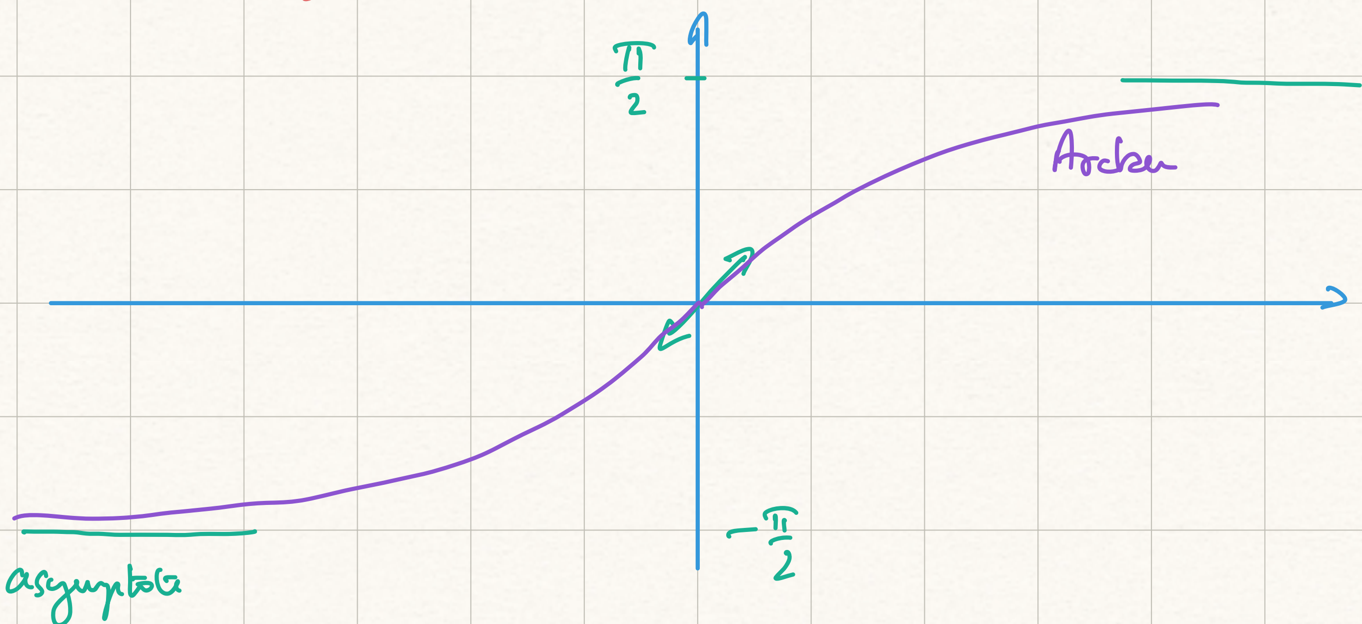
croissante sur $I_k =]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$



$\mathbb{R}$

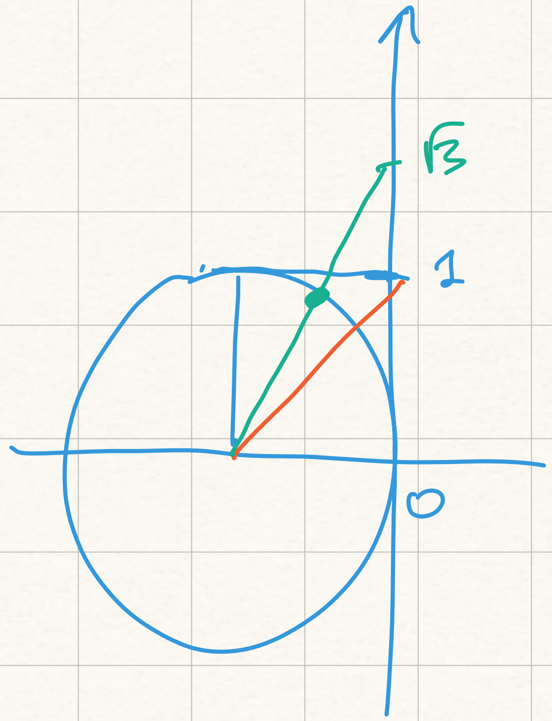
Arctan : $\mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$x \longmapsto$ l'unique angle α tq $\begin{cases} x = \tan(\alpha) \\ \alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$



$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{Arctan}(\sqrt{3}) =$$



$\text{Arctan } 1 = \frac{\pi}{4}$

$\cos \frac{\pi}{3} = 1/2$

$\sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}/2$

$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$\cos^2 + \sin^2 = 1$

$\text{Arctan } \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

car $\frac{\pi}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

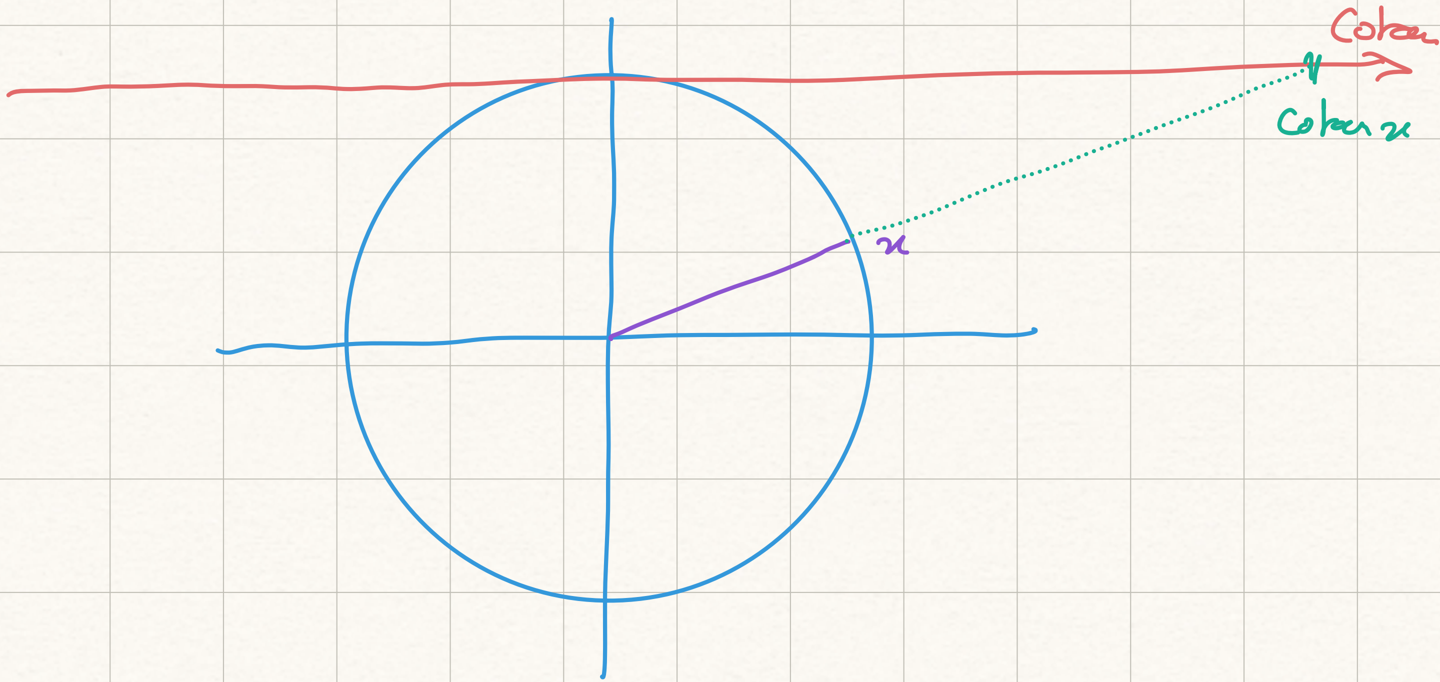
$+ \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$



$$\mathrm{cotan} : \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{\cos x}{\sin x}$$

$\mathrm{cotan} \neq \frac{1}{\tan}$ mais presque

$\boxed{610.3}$

1.5 Trigonométrie circulaire réciproque

18. Quelles sont les fonctions de trigonométrie circulaire réciproques ?
19. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Comment sont-elles définies ?
20. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?
21. Comment utiliser le cercle trigonométrique ?