- Convocation + pièce d'identité.
- 2 stylos → règle, équerre, calculatrice
  étiquette + nom
- boire / manger
- mouchoirs.
- anticiper les trajets pull.

Dénombrement

1 Ensembles finis

1.1 Définition

Définition. On dit qu'un ensemble E est **fini** lorsqu'il est vide, ou qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E soit en bijection avec $\{1, \dots, n\}$.
Dans le premier cas, on définit $\mathrm{Card}(E) = 0$. Dans le second cas, n est unique et on définit $\mathrm{Card}(E) = n$.

$\#(E)$

1.2 Propriétés

Proposition. Deux ensembles finis ont le même cardinal si et seulement s'il existe une bijection entre ces ensembles.

Proposition. Soit E un ensemble fini, et $A \subset E$. Alors :

- A est fini et $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(E)$
- $A = E \iff \mathrm{Card}\, A = \mathrm{Card}\, E$.

Proposition. Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal, et $\varphi : E \to F$. Alors :

$$\varphi \text{ bijective} \iff \varphi \text{ injective} \iff \varphi \text{ surjective}$$

intéressant pour montrer la surjectivité par l'injectivité

1.3 Exemples de cardinaux

Proposition. Soit E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et :

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E)\,\text{Card}(F)$$

Corollaire. Si $E_1, E_2, \ldots, E_p$ sont des ensembles finis, alors $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ est fini et :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = \text{Card}(E_1)\,\text{Card}(E_2) \ldots \text{Card}(E_p)$$

Proposition. Soit E et F deux ensembles finis. Alors $E \cup F$ est fini et :

- si l'union est disjointe, $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F)$;
- en général, $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cap F)$.

Corollaire. Si $E_1, E_2, \ldots, E_p$ sont des ensembles finis deux à deux disjoints, alors $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_p$ est fini et :

$$\text{Card}\left(\cup_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \text{Card}(E_i)$$

2 Dénombrement d'applications, de parties d'un ensemble

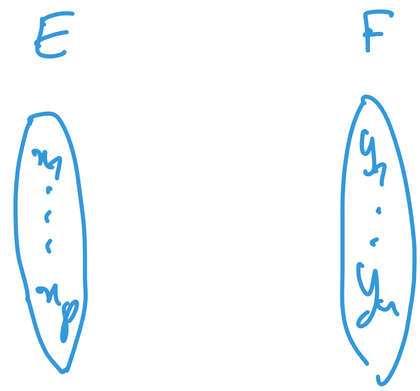
2.1 Nombre d'applications

Théorème.

Soit E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n. On note $\mathcal{F}(E,F) = F^E$ l'ensemble des applications : $E \to F$.
Alors F^E est fini et :

$$\text{Card}(F^E) = \cancel{p^n}\ n^p = \text{Card}(F)^{\text{Card}\, E}$$

Explication :



définir une application $\varphi : E \to F$,

c'est choisir $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(p)$ dans F

Pour chacun, il y a n valeurs possibles

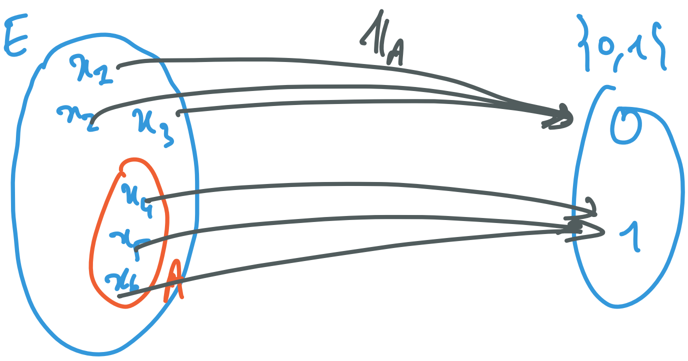
$\longrightarrow$ au total $n \times n \times \cdots \times n = n^p$.

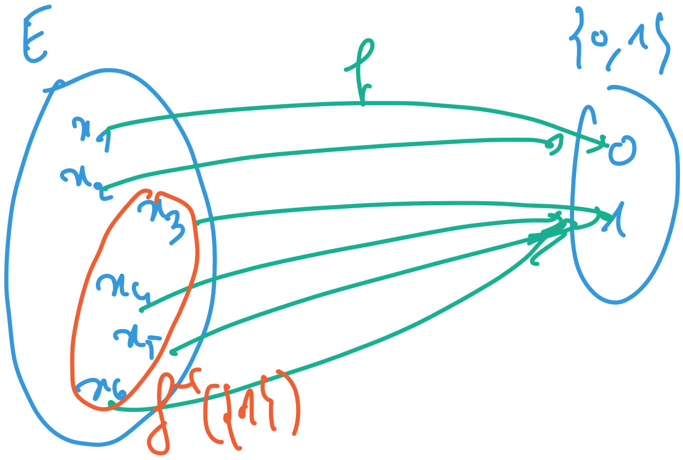
2.3 Fonction indicatrice

Définition. Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle **fonction indicatrice de** A (ou parfois fonction caractéristique de A) l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A : & E & \to & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Proposition. L'application : $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \{0,1\}^E \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$ est une bijection.





$\exists A$ tq $f = \mathbb{1}_A$ $\qquad$ $A = f^{-1}(\{1\})$

2.2 Nombre de parties d'un ensemble

Théorème.

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors l'ensemble de ses parties, $\mathcal{P}(E)$, est fini, et :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n = 2^{\mathrm{Card}(E)} = \mathrm{Card}\left(\{0,1\}^E\right)$$

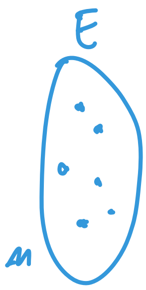
3 Listes, nombre d'injections

(p-Arrangement)

Définition. Soit E un ensemble. On appelle p**-liste d'éléments distincts de** E tout p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ d'éléments de E deux à deux distincts.

Proposition. Si $\mathrm{Card}(E) = n$ et $p \leqslant n$, le nombre de p-listes d'éléments distincts de E est :

$$n(n-1)\ldots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$



$(x_1, \ldots, x_p)$ $\qquad$ $x_i \in E$

x_i 2 à 2 distincts.

Nb de p-listes d'éléments de E distincts

choisir une p-liste d'éléments distincts, c'est :

choisir x_1 $\qquad$ (n choix)

puis choisir x_2 (parmi les $n-1$ élts restants)

$\vdots$

choisir x_p —— $(n-(p-1))$

donc nb de p-listes d'éléments de E

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

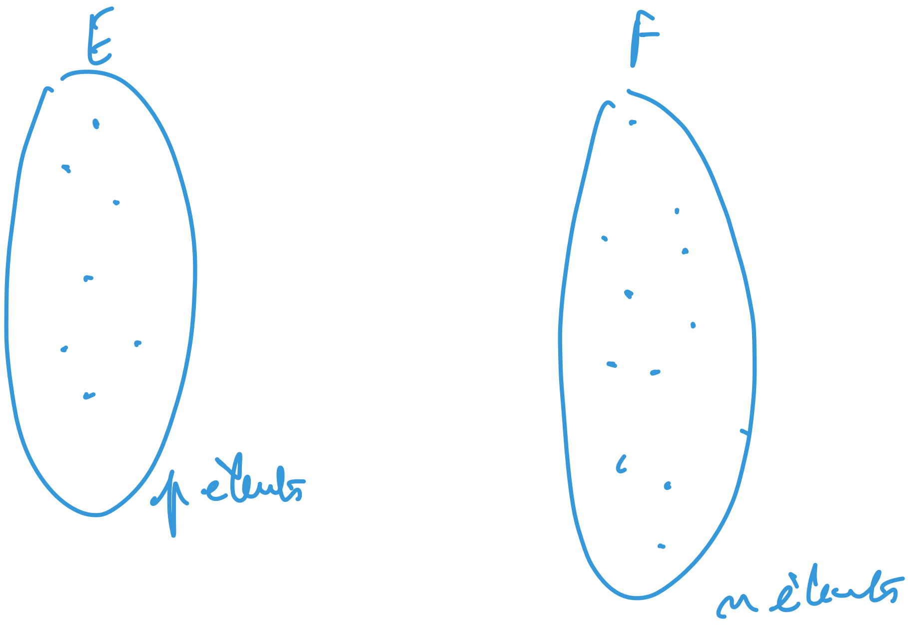
Proposition. Soit E et F deux ensembles finis, de cardinaux respectifs p et n. Le nombre d'applications injectives $E \to F$ est :

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Corollaire. Si E est un ensemble fini de cardinal n, alors :

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{S}(E)) = n!$$

où $\mathfrak{S}(E)$ désigne l'ensemble des permutations de E, c'est-à-dire les bijections : $E \to E$.



Définir une injection $f : E = \{x_1, \dots, x_p\} \to F$

c'est définir $f(x_1)$ (n choix)

et $f(x_2)$ $(n-1)$ choix

$\vdots$

$f(x_p)$ $(n-p+1)$ choix

ou encore:

les p-listes d'éléments distincts de F

$$(f(x_1) \dots f(x_p))$$

Il y en a $\dfrac{n!}{(n-p)!}$

4 Combinaisons

Définition. Soit E un ensemble. On appelle p-**combinaison** une partie de E à p éléments.

Définition. Pour $n, p \in \mathbb{N}$, on appelle p **parmi** n et on note $\binom{n}{p}$ le nombre de p-combinaisons d'un ensemble à n éléments, c'est-à-dire le nombre de parties à p éléments.

Proposition. Lorsque $0 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Remarque. *Il est maladroit de systématiquement remplacer un coefficient binomial par son expression factorielle.*

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

Proposition.

- $\binom{n}{0} = 1$ $\qquad \binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{n} = 1$ $\qquad \binom{n}{n-1} = n$
- Pour $p > n$ ou $p < 0$, $\binom{n}{p} = 0$
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$ *(formule de Pascal)*
- $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ pour $n, p \geqslant 1$
- $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$

p augmente

n augmente

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & \xrightarrow{+} 3 & 1 & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}$$

$$\binom{n-1}{p} = \binom{n-2}{p} + \binom{n-2}{p-1} \qquad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

$\boxed{\textbf{81.1}}$

(a) Justifier que $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = 2^n$.

(b) Justifier que $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n}$ en commençant par remarquer que $\displaystyle\binom{n}{p}^2 = \binom{n}{p}\binom{n}{n-p}$.

(a). Par le binôme, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} 1^p 1^{n-p} = (1+1)^n = 2^n$

• $\displaystyle\mathcal{P}(E) = \bigsqcup_{\substack{\text{disjointe} \\ p=0}}^{n} \{\text{partie de } E \text{ de card } p\}$

$\displaystyle = \bigsqcup_{\substack{p=0 \\ \text{disjointe}}}^{n} \mathcal{P}_p(E)$

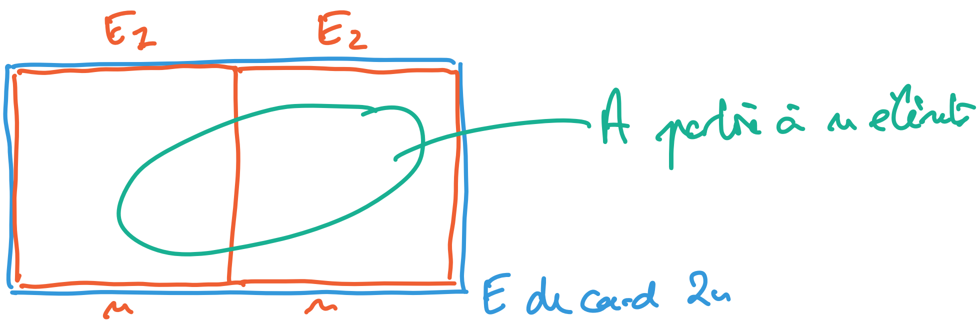
l'ens des parties de card p

donc $\displaystyle\text{Card } \mathcal{P}(E) = \sum_{p=0}^{n} \text{Card } \mathcal{P}_p(E)$

ie $\displaystyle 2^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$

(b) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n}$

•



choisir A partie de E à n éléments,

c'est choisir p éléments dans E_1 et

$n-p$ ——— E_2 où $p \in [\![0,n]\!]$

(Bijection $\mathcal{P}_n(E) \longrightarrow \bigcup_{p=0}^{n} \mathcal{P}_p(E_1) \times \mathcal{P}_{n-p}(E_2)$)

donc $\operatorname{Card} \mathcal{P}_n(E) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}\binom{n}{n-p}$

à définir

$$\operatorname{Card} \mathcal{P}_n(E) = \binom{2n}{n}, \qquad \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}\binom{n}{n-p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2$$

$\boxed{\text{M2}}$ $(X+1)^{2n} = (X+1)^n (X+1)^n$

donc $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k\right)$

coeff en X^n

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

81.2 CCINP 112

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.

2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.

3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

1) On note $X = \{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2 \text{ tq } A \subset B\}$

choisir un couple (A,B) tq $A \subset B$,

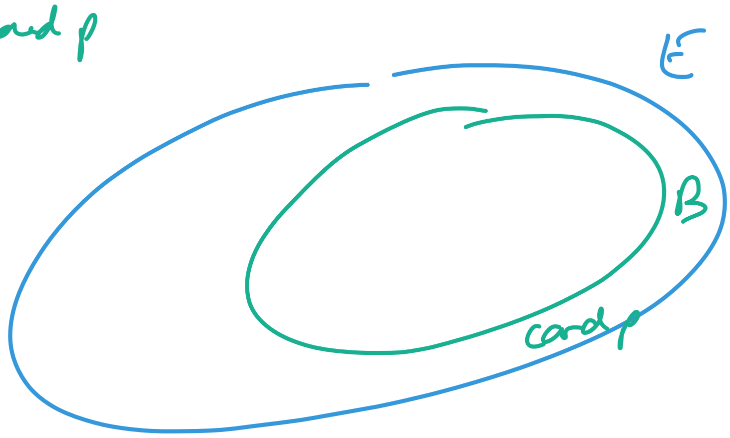
c'est choisir une partie A de cardinal p $\binom{n}{p}$

et une partie B contenant A

C'est choisir une partie B de cardinal p

et une partie de B notée A (de card $k \leq p$)

donc
$$\text{Card } X = \sum_{p=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{p}}_{\text{choix de } B \text{ de card } p} \underbrace{\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}}_{\text{choix de } A} \to 2^p$$



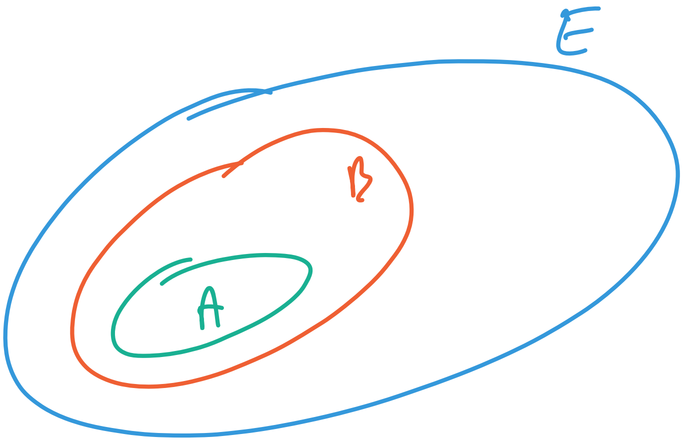
Plus formellement :
$$X = \bigcup_{\substack{p=0 \\ \text{disjoints}}}^{n} \underbrace{\{(A,B) \text{ tq } A \subset B,\ B \text{ de card } p\}}_{X_p}$$

$$X_p \longleftrightarrow \{B \text{ de card } p\} \times \mathcal{P}(B)$$

Ccl : $\text{Card } X = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = 3^n$

M2

$3^n = \mathrm{Card}\, \{0,1,2\}^E$



Pour $A \subset B$

$$f_{AB} : E \longrightarrow \{0,1,2\}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in E \setminus B \\ 1 & \text{si } x \in B \setminus A \\ 2 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

inversement : Si $f : E \to \{0,1,2\}$.

on pose $A = f^{-1}(\{2\})$

$B = f^{-1}(\{1,2\})$

alors $f = f_{AB}$

donc bijection $X \longrightarrow \{0,1,2\}^E$

donc $\mathrm{Card}\, X = 3^n$.

② $Y = \{(A,B) \mid A \cap B = \emptyset\}$

$= \{(A,B) \mid A \subset \overline{B}\}$

$$\phi : X \longrightarrow Y \qquad \text{bijective}$$
(réciproque facile)

$$(A,B) \longrightarrow (A,\overline{B})$$
$$\text{tq } A \subset B \qquad\qquad \text{tq } A \subset \overline{(\overline{B})}$$

donc $\operatorname{Card} X = \operatorname{Card} Y = 3^n$

(3) $Z = \{ (A,B,C)$ tq $A \cup B \cup C = E$, 2 à 2 disjoints $\}$

Pour $(A,B) \in Y$ (ie $A \cap B = \phi$)

$(A,B,C) \in Z \iff C = E \setminus (A \cup B)$

donc $\operatorname{Card} Z = \operatorname{Card} Y = 3^n$

81.8

Lorsque l'on énumère, en binaire, tous les entiers de 1 à 1024, combien de fois utilise-t-on le chiffre 1 ?

$\boxed{\textbf{81.4}}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.