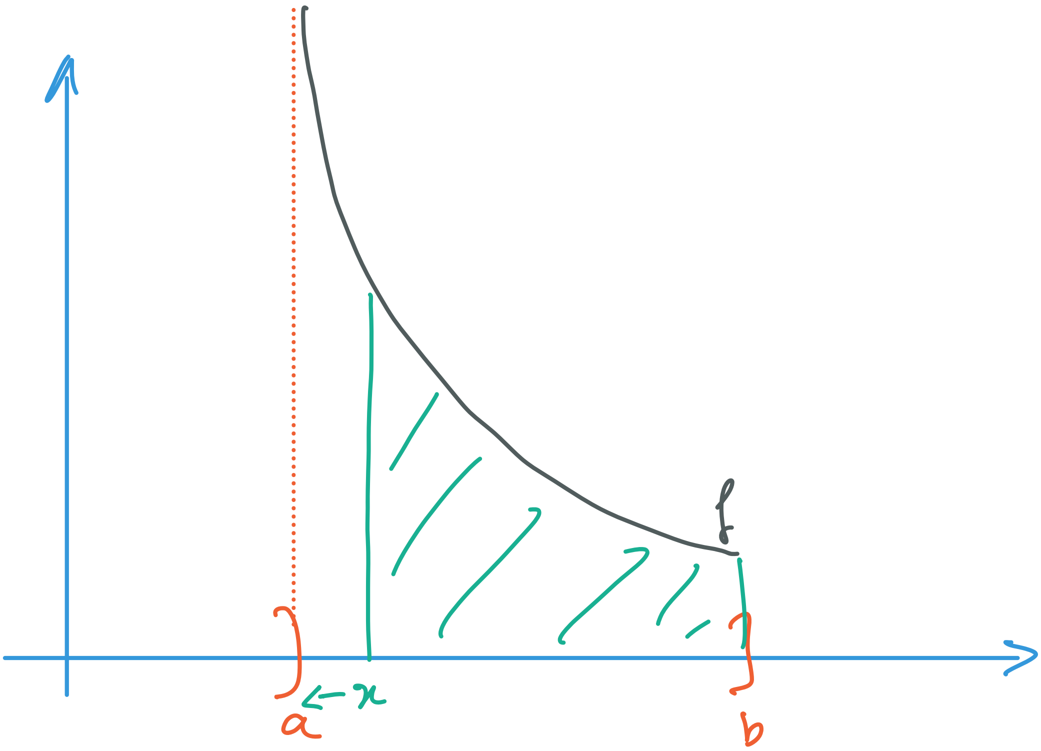
Intégration – focus sur l'intégration des relations de comparaison



4 Intégration des relations de comparaison

4.1 Intégrale généralisée en $+\infty$

4.1.1 Cas d'intégrabilité, résultat sur les restes

Théorème.

Soit f une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, g une fonction réelle positive continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.

- Si $f(x) = \underset{x \to +\infty}{O}(g(x))$ et g intégrable en $+\infty$, alors f est intégrable en $+\infty$ et on peut comparer les restes :
$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x \to +\infty}{O}\left(\int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$
- Si $f(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(g(x))$ et g intégrable en $+\infty$, alors f est intégrable en $+\infty$ et on peut comparer les restes :
$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x \to +\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$ (qté $\to$ 0)
- Si f est aussi ~~à valeurs réelles positives~~, que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x)$ et g intégrable en $+\infty$, alors f est intégrable en $+\infty$ et on peut comparer les restes :
$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. *Il s'agit ici de comparaison de quantité qui sont petites, qui tendent vers* 0*.*

4.1.2 Cas de non intégrabilité, résultat sur les intégrales partielles

Théorème.

Soit f une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, g une fonction réelle positive continue par morceaux sur $[a,+\infty[$.

- Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(g(x))$ et g non intégrable en $+\infty$, alors on peut comparer les intégrales partielles :
$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$
- Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(g(x))$ et g non intégrable en $+\infty$, alors on peut comparer les intégrales partielles :
$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$
(qté $\longrightarrow +\infty$)
- Si f est aussi ~~à valeurs réelles~~ positives, que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ et g non intégrable en $+\infty$, alors f n'est pas intégrable en $+\infty$ et on peut comparer les intégrales partielles :
$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. *Il s'agit ici de comparaison de quantité qui sont grandes, qui tendent vers $+\infty$.*

Remarque. *Dans les deux premiers points, on n'a pas d'information sur la convergence ou la divergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, mais le résultat n'a pas d'intérêt lorsque $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.*

$\boxed{66.39}$

Déterminer un équivalent simple de :

(b) $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}$ lorsque $x \to +\infty$.

Au voisinage de $t \to +\infty$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t^3+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3} \\ \dfrac{1}{t^3} \geq 0 \quad \forall t > 0 \\ \displaystyle\int^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,dt \text{ converge} \end{cases}$$

donc par intégration des rel. de comparaison,

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^3+1} \sim \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,dt = \left[-\frac{1}{2}t^{-2}\right]_x^{+\infty} = \frac{1}{2x^2}$$

4.2 Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque

Le résultat précédent s'adapte pour une intégrale généralisée à gauche en $b \in]-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, ou généralisée en à droite en $a \in [-\infty, +\infty[= \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

4.2.1 Cas d'intégrabilité, résultat sur les restes

Théorème.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit f une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $[a, b[$, g une fonction réelle positive continue par morceaux sur $[a, b[$.

- Si $f(x) = \underset{x \to b}{O}(g(x))$ et g intégrable en b, alors f est intégrable en b et on peut comparer les restes :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x \to b}{O}\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

- Si $f(x) = \underset{x \to b}{o}(g(x))$ et g intégrable en b, alors f est intégrable en b et on peut comparer les restes :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x \to b}{o}\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

- Si f est aussi à valeurs réelles positives, que $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$ et g intégrable en b, alors f est intégrable en b et on peut comparer les restes :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to b}{\sim} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $]a, b]$, g une fonction réelle positive continue par morceaux sur $]a, b]$.

- Si $f(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x))$ et g intégrable en a, alors f est intégrable en a et on peut comparer les restes :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x \to a}{O}\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

- Si $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$ et g intégrable en a, alors f est intégrable en a et on peut comparer les restes :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x \to a}{o}\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

- Si f est aussi à ~~valeurs réelles positives~~, que $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ et g intégrable en a, alors f est intégrable en a et on peut comparer les restes :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to a}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

4.2.2 Cas de non intégrabilité, résultat sur les intégrales partielles

Théorème.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit f une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $[a, b[$, g une fonction réelle positive continue par morceaux sur $[a, b[$.

- Si $f(x) = \underset{x \to b}{O}(g(x))$ et g non intégrable en b, alors on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x \to b}{O}\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

- Si $f(x) = \underset{x \to b}{o}(g(x))$ et g non intégrable en b, alors on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x \to b}{o}\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

- Si f est aussi à valeurs réelles positives, que $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$ et g non intégrable en b, alors f n'est pas intégrable en b et on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to b}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $]a, b]$, g une fonction réelle positive continue par morceaux sur $]a, b]$.

- Si $f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$ et g non intégrable en a, alors on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to a}{=} O\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

- Si $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ et g non intégrable en a, alors on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to a}{=} o\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

- Si f est aussi à valeurs réelles positives, que $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ et g non intégrable en a, alors f n'est pas intégrable en b et on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to a}{\sim} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

$\boxed{\textbf{66.39}}$

Déterminer un équivalent simple de :

(a) $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t - 1}$ lorsque $x \overset{>}{\to} 0$.

Au vois de $t \to 0$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{e^t - 1} \sim \dfrac{1}{t} \\ \dfrac{1}{t} \geq 0 \\ \dfrac{1}{t} \text{ non intégrable sur }]0, 1] \end{cases}$$

Par intégration des rel de comparaison :

$$\int_x^1 \frac{dt}{e^t - 1} \underset{x \to 0}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{t}\, dt$$

$$= [$$