

Séries numériques, focus sur la sommation des relations de comparaison

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$

$$u_1 \sim \frac{1}{1}$$

$$u_2 \sim \frac{1}{2}$$

$$u_3 \sim \frac{1}{3}$$

$$\vdots$$

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$

$$u_1 + \dots + u_n \sim 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

5.2 Cas de divergence (résultat sur les sommes partielles)

Théorème.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle ou complexe, et $(v_n)_n$ une suite de réels positifs.

- Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ diverge, alors on peut comparer les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^n u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_k \right)$$

- Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ ~~div~~ converge, alors on peut comparer les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^n u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_k \right)$$

- Si ~~$(u_n)_n$ est aussi une suite de réels positifs~~, $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge et on peut comparer les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n v_k$$

Remarque. Il s'agit ici de comparaison de quantité qui sont grandes, qui tendent vers $+\infty$.

Remarque. Dans les deux premiers points, on n'a pas d'information sur la convergence ou la divergence de $\sum u_n$, mais le résultat n'a pas d'intérêt lorsque $\sum u_n$ converge.

Remarque. Le résultat classique connu sous le nom de « théorème de Césàro » est une simple application de ce théorème.

Preuve: On suppose $u_n = o(v_n)$

$$\text{ii } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tq } \forall n \geq n_0 \quad |u_n| \leq \varepsilon v_n$$

$$\text{Hyp: } \sum_{k=0}^n u_k = o \left(\sum_{k=0}^n v_k \right)$$

$$\text{ii } \forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \text{ tq } \forall n \geq n_1 \quad \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^n v_k$$

Soit $\varepsilon > 0$

$$\text{Par hyp avec } \frac{\varepsilon}{2}, \exists n_0 \text{ tq } \forall n \geq n_0 \quad |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} v_n$$

Alors:

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0 \quad \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |u_k| + \sum_{k=n_0}^n |u_k| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=n_0}^n v_k \end{aligned}$$

$$\leq \boxed{\sum_{k=0}^{m_1-1} |u_k|} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^m v_k$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{K \text{ constante}} \quad \quad \quad \uparrow$
 or ajout de $\varepsilon m > 0$

or $\sum v_n$ diverge et $v_n \geq 0 \forall n$
 donc $\left(\sum_{k=0}^m v_k\right)_n$ tend vers $+\infty$

donc par diff avec $\frac{2}{\varepsilon} K$, $\exists m_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq m_2$

$$\sum_{k=0}^m v_k \geq \frac{2}{\varepsilon} K$$

$$\forall n \geq \max(m_0, m_1), \quad \left| \sum_{k=0}^m u_k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^m v_k$$

On a aussi $\sum_{k=0}^m u_k = o\left(\sum_{k=0}^m v_k\right)$

• On suppose u_n et $v_n \geq 0 \forall n$

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \text{ ie } u_n - v_n = o(v_n)$$

or $v_n \geq 0$, $\sum v_n$ diverge donc

par le point précédent

$$\sum_{k=0}^n (u_k - v_k) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o \left(\sum_{k=0}^n v_k \right)$$

$$\left(\sum_{k=0}^n u_k \right) - \left(\sum_{k=0}^n v_k \right)$$

$$\text{i.e.} \quad \sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n v_k$$

52.46

On pose : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \sqrt{k}}$.

- (a) Donner un équivalent simple de S_n .
(b) Montrer qu'il existe une constante C tel que :

$$S_n = \ln(n) + C + o(1)$$

(a) On note $u_n = \frac{1}{n + \sqrt{n}}$

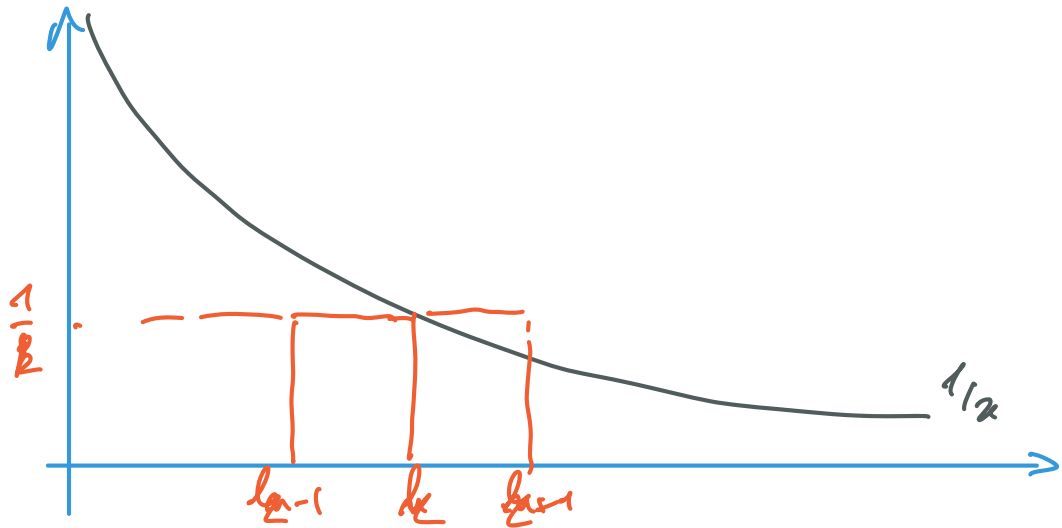
$$\text{On a } \begin{cases} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \\ \sum \frac{1}{n} \text{ diverge} \\ \frac{1}{n} \geq 0 \end{cases}$$

Donc par sommation des rel. de comparaison

$$\sum_{k=1}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

?

Rappel: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$



Par comparaison série-intégrale, avec $x \mapsto \frac{1}{x}$
décroissante:

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t} dt$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ \ln(n+1) & & 1 + \ln(n) \\ \parallel & & \int_1^n \\ \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) & & \int_1^n \\ \int & & \ln n \end{array}$$

(b) Montrer qu'il existe une constante C tel que :

$$S_n = \ln(n) + C + o(1)$$

On a euit:
$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + o(\ln(n))$$

$$= \ln(n) + o(\ln(n))$$

On calcule

$$S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+\sqrt{k}} - \frac{1}{k} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{-\sqrt{k}}{\underbrace{k^2 + k\sqrt{k}}_{x_k}}$$

où $x_k \sim \frac{1}{k^{3/2}}$ tg série abs. convergente

donc $\sum x_k$ converge

donc $\sum_{k=1}^n x_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ notée S

donc $\sum_{k=1}^n x_k = S + o(1)$

Bref: $\exists S \in \mathbb{R}$ tq $S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = S + o(1)$

Il que $\exists \gamma$ tq $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \ln(k) - \ln(k-1)$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right)$$

$$\begin{aligned} \text{or } \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \\ = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \\ = O\left(\frac{1}{k^2}\right) \end{aligned}$$

↑ $\frac{1}{k^2}$ série abs. convergente

$$\text{donc } \sum_k \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \text{ converge}$$

donc $\exists \gamma$ limite à la suite des sommes partielles.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = \gamma + o(1)$$

51.3

On considère une suite réelle $(u_n)_n$, et on note $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$ la moyenne arithmétique de ses premiers termes.

(a) On suppose que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Démontrer que la suite $(v_n)_n$ converge vers 0.

(b) On suppose que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \neq 0$. Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

(a) On suppose $u_n = o(1)$

$$\text{or } \sum 1 \text{ diverge}$$

$$\text{et } 1 \geq 0$$

donc par suite des rel. de comparaison:

$$\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n 1\right)$$

$$= o(n+1)$$

ie $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k = o(1)$

ie $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

(b) On suppose $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \neq 0$

ie $\left\{ \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} l \quad (l \neq 0) \\ \sum l \text{ diverge } (l \neq 0) \\ l \text{ de signe constant} \end{array} \right.$

donc par sommation des rel. de comparaison,

$$\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n l$$

$$\parallel$$

$$(n+1)l$$

donc $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$

5 Sommation des relations de comparaison

5.1 Cas de convergence (résultat sur les restes)

Théorème.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle ou complexe, et $(v_n)_n$ une suite de réels positifs.

- Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge (absolument) et on peut comparer les restes :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$$

- ② • Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge (absolument) et on peut comparer les restes :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$$

- Si $(u_n)_n$ est aussi une suite de réels positifs, $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et on peut comparer les restes :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

Remarque. Il s'agit ici de comparaison de quantité qui sont petites, qui tendent vers 0.

Preuve: ② Soit $\varepsilon > 0$

Par def de $u_n = o(v_n)$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq n_0$

$$|u_k| \leq \varepsilon v_k$$

Alors $\forall n \geq n_0$

$$\forall k \geq n \quad |u_k| \leq \varepsilon v_k$$


$$\text{donc} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k|$$

$$\leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

$$\text{i.e.} \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$$

③ Comme § 52.

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n \rightarrow 0 \quad (v_n)$$

52.26 

Déterminer un équivalent simple au voisinage de $n \rightarrow +\infty$ de :

(a) $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + k + 1}$

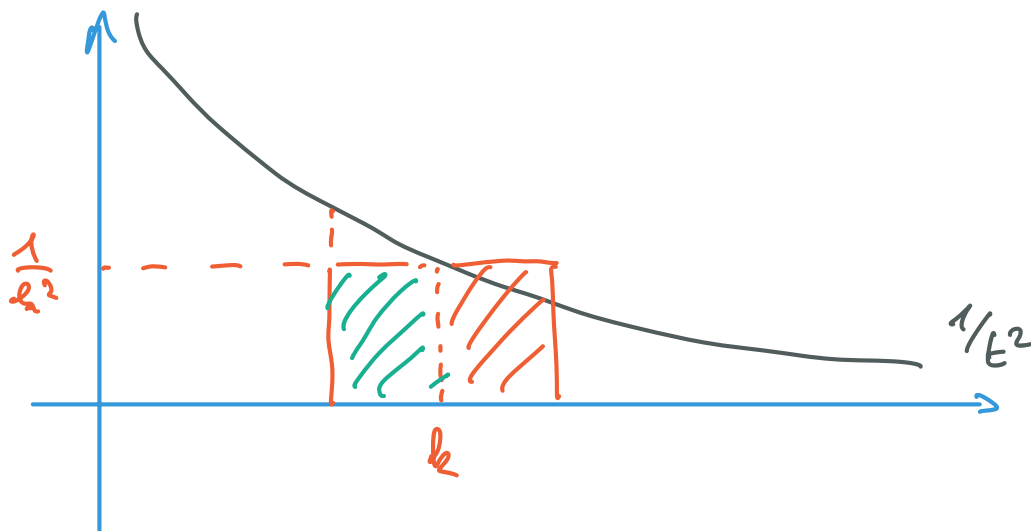
(b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \sqrt{k}}$

(a) $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k^2 + k + 1} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k^2} \\ \frac{1}{k^2} \geq 0 \\ \sum \frac{1}{k^2} \text{ converge} \end{array} \right.$

Donc par sommation de rel. de comparaison,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + k + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Comparaison série-intégrale:



$t \mapsto \frac{1}{t^2}$ décroissant

$$\forall p \quad \sum_{k=n+1}^p \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \stackrel{\text{red}}{\leq} \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k^2} \stackrel{\text{green}}{\leq} \sum_{k=n+1}^p \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$$

$$\int_{n+1}^{p+1} \frac{1}{t^2} dt \quad \parallel \quad \int_n^{p+1} \frac{1}{t^2} dt$$

Lorsque $p \rightarrow +\infty$

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$$

$$\parallel \quad \parallel$$

$$\frac{1}{n+1} \quad \left[-\frac{1}{t} \right]_n^{+\infty}$$

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t} \quad \parallel \quad \frac{1}{n}$$

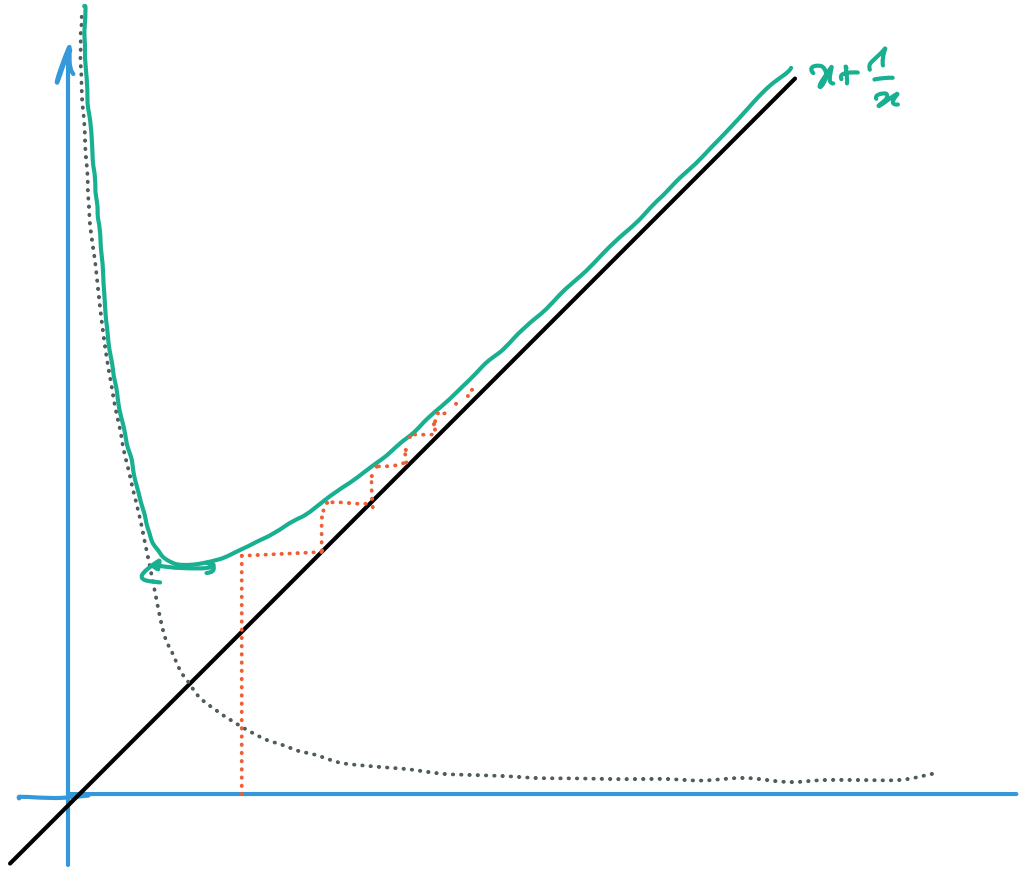
CC : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + k} \underset{\text{for}}{\sim} \frac{1}{n}$

52.50

On considère la suite définie par :

$$u_1 > 0 \text{ et } u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- (a) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- (b) En envisageant u_n^2 , déterminer un équivalent de u_n .



$$u_1 > 0, \quad \forall n \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$

- Par récurrence, " u_n existe et $u_n > 0$ " $\forall n$
- $\forall n \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$
 $> u_n$

donc $(u_n)_n \uparrow$

- Si $(u_n)_n$ majorée, par ce monotonie,

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{Or } \forall n \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$

donc à la limite, $l = l + \frac{1}{l}$ absurde

- CL : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

(b) Chercher α tq

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \neq 0$$

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = \left(u_n + \frac{1}{u_n} \right)^\alpha - u_n^\alpha$$

$$= u_n^\alpha \left[\left(1 + \frac{1}{u_n^2} \right)^\alpha - 1 \right]$$

$$= u_n^\alpha \left[\alpha \cdot \frac{1}{u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right) \right]$$

On choisit $\alpha = 2$

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + o(1)$$

$$\underset{+ \infty}{\sim} 2$$

or $\sum 2$ diverge

et $2 > 0$

donc par sommation des rel. de récurrence :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} 2$$

" " " "

$$u_n^2 - u_0^2 \quad 2n$$

$$\text{denc } \mu_n^2 - \underbrace{\mu_0^2}_{\text{cte}} = 2n + o(n)$$

$$\mu_n^2 = 2n + o(n)$$

$$\text{denc } \mu_n^2 \sim 2n$$

$$\text{denc } \mu_n \underset{+a}{\sim} \sqrt{2n}$$

MPI 12 mai -> 16 mai

	Lundi	Mardi			Mercredi	Jeudi	Vendredi		
M1	tipe B317	TIPE Fortier B313	TIPE Hache physique	TIPE Haberer B317	tipe B317	tipe B317	TIPE Fortier B313	TIPE Hache physique	TIPE Haberer B317
M2	tipe B317				tipe B317	tipe B317			
M3	tipe B317				tipe B317	tipe B317			
M4	tipe B317				tipe B317	tipe B317			
S1	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317
S2	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317
S3	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317
S4	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317
S5									

MPI 19 mai -> 23 mai

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi		
M1	math B317		math B317	physique B317	physique B317		
M2	math B317		math B317	physique B317	physique B317		
M3	informatique B317	TIPE Hache B317		TIPE Haberer B308	informatique B317		
M4	informatique B317	TIPE Hache B317		TIPE Haberer B308	informatique B317		
S1	TIPE Fortier B317	lettres B312	anglais B321	math B317	informatique B313		
S2	TIPE Fortier B317	lettres B312	anglais B321	math B317	informatique B313		
S3		tipe B317	TIPE Fortier B313	TIPE Hache B308	TIPE Haberer B317	tipe B317	tipe B317
S4		tipe B317	TIPE Fortier B313	TIPE Hache B308	TIPE Haberer B317	tipe B317	tipe B317
S5							

MPI 26 mai -> 28 mai

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
M1	math B317	math B317	math B317	Fénié	Lycée fermé
M2	math B317	math B317	math B317		
M3	physique B317	informatique B317	physique B317		
M4	physique B317	informatique B317	physique B317		
S1	informatique B317	tipe B317	tipe B317		
S2	informatique B317	tipe B317	tipe B317		
S3	tipe B317	tipe B317	tipe B317		
S4	tipe B317	tipe B317	tipe B317		
S5					

MPI 2 juin -> 6 juin

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi		
M1	math B317	tipe B317	math B317	TIPE Haberer B308	physique B317		
M2							
M3	physique B317	tipe B317		physique B317	informatique B317		
M4							
S1	informatique B317	lettres B312	anglais B321	math B317	tipe B317		
S2							
S3	tipe B317	tipe B317	TIPE Fortier B313	TIPE Hache B308	TIPE B317	tipe B317	informatique B313
S4							
S5							

MPI 10 juin -> 13 juin

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	
M1	Février	tipe B317	math B317	physique B317	TP Centrale physique	
M2						
M3		TP Centrale physique				informatique B317
M4						
		TIPE limite téléversement				
S1		lettres B312	anglais B321	math B317	TP informatique B313	
S2						
S3		tipe B317	TP informatique B313	tipe B317	tipe B317	
S4						
S5						

MPI 16 juin -> 20 juin

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
M1	math centrale B313	physique TP centrale B313	math centrale B313		
M2					
M3					
M4					
S1	TP informatique B313				
S2					
S3					
S4					
S5					

MPI* 12 mai -> 16 mai

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi			
M1	tipe B317	TIPE Fortier B313	TIPE Hache physique	TIPE Haberer B317	tipe B317	TIPE Fortier B313	TIPE Hache physique	TIPE Haberer B317
M2								
M3	tipe B317	TIPE Fortier B313	TIPE Hache physique	TIPE Haberer B317	tipe B317	TIPE Fortier B313	TIPE Hache physique	TIPE Haberer B317
M4								
S1	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317			
S2								
S3	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317	tipe B317			
S4								
S5								

MPI* 19 mai -> 23 mai

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi		
M1	math B317	TIPE Hache B317	lettres B310	TIPE Haberer B308	physique B317		
M2							
M3	informatique B317	anglais B310	math B317	physique B317	informatique B317		
M4							
S1		tipe B317	TIPE Fortier B313	TIPE Hache B308	TIPE Haberer B317	math B317	tipe B317
S2							
S3	TIPE Fortier B317	tipe B317				tipe B317	informatique B313
S4							
S5							

MPI* 26 mai -> 28 mai

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
M1	math B317	math B317	math B317	Félicité	Lycée fermé
M2					
M3	physique B317	informatique B317	physique B317		
M4					
S1	informatique B317	tipe B317	tipe B317		
S2					
S3	tipe B317	tipe B317	tipe B317		
S4					
S5					

MPI* 2 juin -> 6 juin							
	Lundi	Mardi	Mercredi			Jeudi	Vendredi
M1	math B317	tipe B317	lettres B310			physique B317	physique B317
M2							
M3	physique B317	anglais B310	math B317			TIPE Haberer B308	informatique B317
M4							
						TIPE Haberer B308	
S1	informatique B317	tipe B317	TIPE Fortier B313	TIPE Hache B308	TIPE B317	math B317	informatique B313
S2							
S3	tipe B317	tipe B317	tipe B317			tipe B317	tipe B317
S4							
S5							

MPI* 10 juin -> 13 juin							
	Lundi	Mardi	Mercredi			Jeudi	Vendredi
M1	Février	TP Centrale physique	lettres B310				TP Centrale physique
M2							
M3		anglais B310	math B317			physique B317	informatique B317
M4							
			TIPE limite téléversement				
S1		tipe B317	TP informatique B313	math B317			tipe B317
S2							
S3		tipe B317	tipe B317			tipe B317	TP informatique B313
S4							
S5							

MPI* 16 juin -> 20 juin							
	Lundi	Mardi	Mercredi			Jeudi	Vendredi
M1	math centrale	physique TP centrale	math centrale				
M2							
M3							
M4							
S1	TP informatique B313						
S2							
S3							
S4							
S5							