Connexité par arc

Sauf mention contraire, on travaille dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

1 Parties connexes par arcs

1.1 Chemin continu

Définition. Soit A une partie de E. Pour $a, b \in A$, on appelle **chemin continu** (ou : arc) **joignant** a **à** b **dans** A toute application :

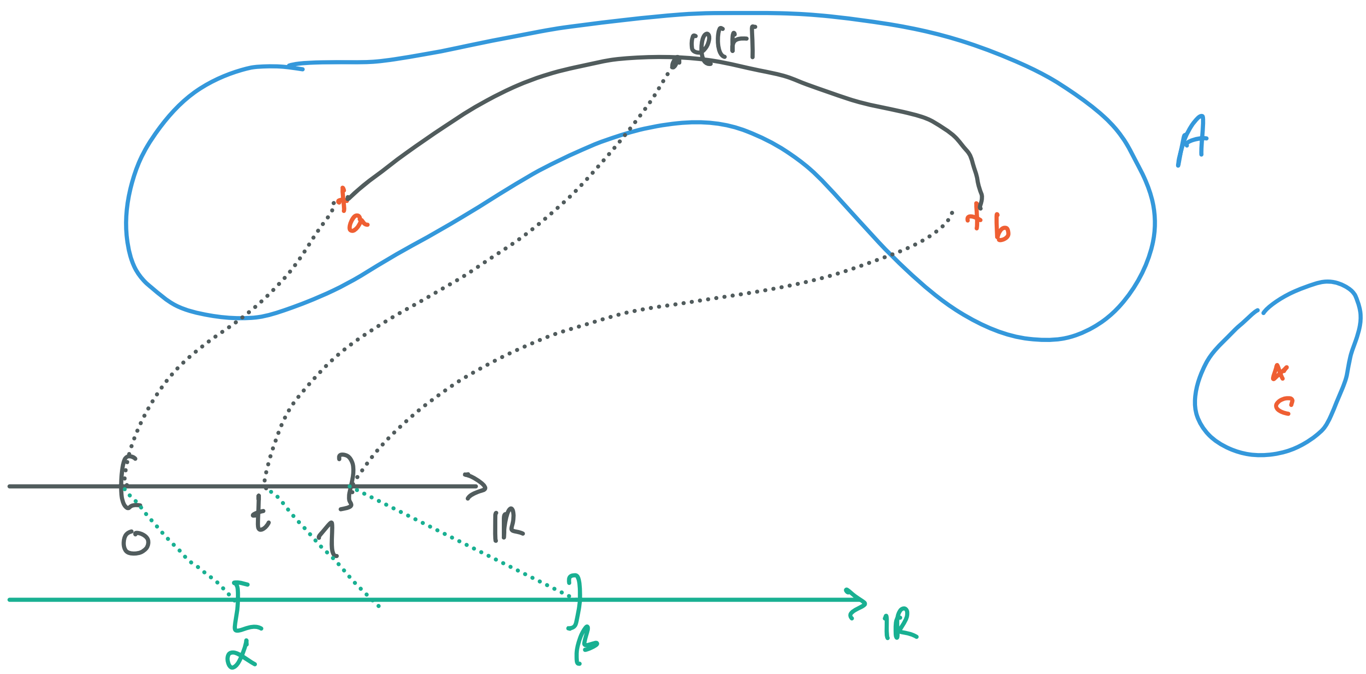
$$\varphi \,:\, [0,1] \to E$$

telle que :

- φ est continue
- $\forall t \in [0,1],\ \varphi(t) \in A$
- $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$

Remarque.

- *L'image (directe) $\varphi([0,1])$ s'appelle parfois le* ***support*** *du chemin.*
- *Par abus, $\gamma \,:\, [\alpha, \beta] \to E$ continue, à valeurs dans A et telle que $\gamma(\alpha) = a$ et $\gamma(\beta) = b$ s'appelle aussi* ***chemin*** *: on se ramène à la définition en composant φ par $t \mapsto (1-t)\alpha + t\beta$ ou γ par $t \mapsto \dfrac{t-\alpha}{\beta-\alpha}$.*



Définition. On définit une relation binaire sur A en disant que $a\mathcal{R}b$ lorsqu'il existe un chemin continu joignant a à b dans A.

Proposition. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur A.

Preuve:

- réflexive: Soit $a \in A$

Posons $\varphi : [0,1] \longrightarrow A$

$t \longmapsto a$

donc $a \mathcal{R} a$

- symétrique Soit $a, b \in A$ tq $a \mathcal{R} b$

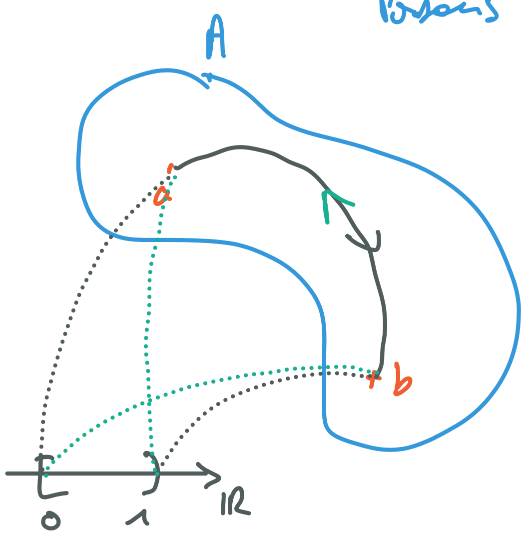
ie $\exists\, \varphi : [0,1] \xrightarrow[\text{continue}]{} A$ tq $\varphi(0)=a$

$\varphi(1)=b$

Mq $b \mathcal{R} a$

Posons $\psi : [0,1] \longrightarrow A$

$t \longmapsto \varphi(1-t)$



continue, à valeurs dans A,

$\psi(0) = \varphi(1) = b$

$\psi(1) = \varphi(0) = a$

donc $b \mathcal{R} a$

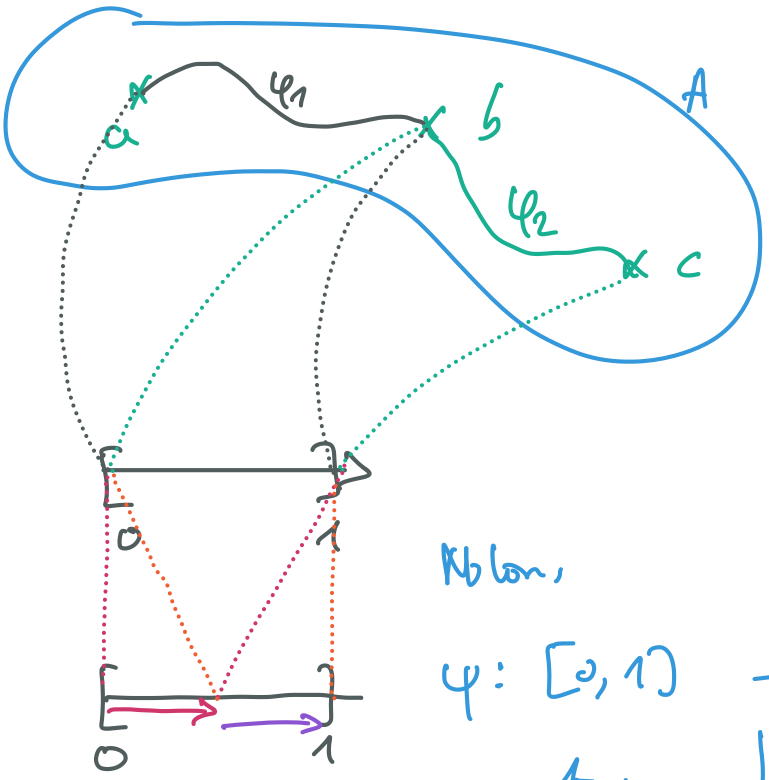
Transitivité: On suppose $a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} c$

donc $\exists \varphi_1, \varphi_2 : [0,1] \longrightarrow A$

tq $\varphi_1(0)=a$, $\varphi_1(1)=b$

$\varphi_2(0)=b$ $\varphi_2(1)=c$

<u>Mque $a \mathcal{R} c$</u>



Notons,

$$\varphi : [0,1] \longrightarrow A$$

$$t \longmapsto \begin{cases} \varphi_1(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \varphi_2(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

φ est à valeurs dans A car φ_1, φ_2 le sont

$\varphi(0) = \varphi_1(0) = a$

$\varphi(1) = \varphi_2(1) = c$

φ est continue sur $[0, \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}, 1]$

car φ_1 et φ_2 le sont sur $[0,1]$

pour $t \to \frac{1}{2}^{<}$ $\varphi(t) = \varphi_1(2t) \longrightarrow \varphi_1(1) = b$

pour $r \underset{>}{\to} \frac{1}{2}$ $\varphi(r) = \varphi_2(2r-1) \longrightarrow \varphi_2(0) = b$

donc φ est continu en $\frac{1}{2}$

donc $a \mathcal{R} c$.

1.2 Composantes connexes par arcs, connexite par arcs

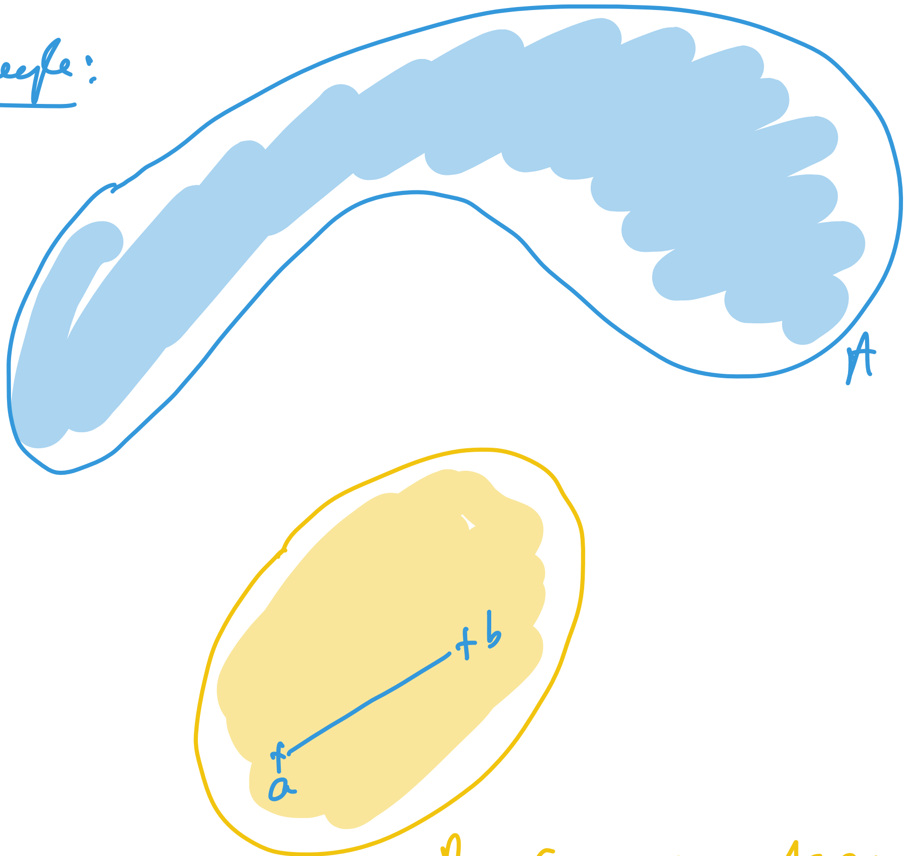
Définition. Soit A une partie de E.

- On appelle **composantes connexes par arcs de** A les classes d'équivalences de la relation $\mathcal{R}$.
- On dit que A est **connexe par arcs** lorsqu'il y a une unique composante connexe par arcs, qui est A.

i.e. $\forall a, b \in A$, $\exists \varphi : [0,1] \to A$ chemin continu qui joint a à b dans A.

Proposition. Les composantes connexes par arcs de A forment une partition de A.

Exemple :



B convexe est connexe par arcs

Soit $a, b \in B$

Par convexité $[a,b] \subset B$

On définit : $\varphi : [0,1] \longrightarrow B$

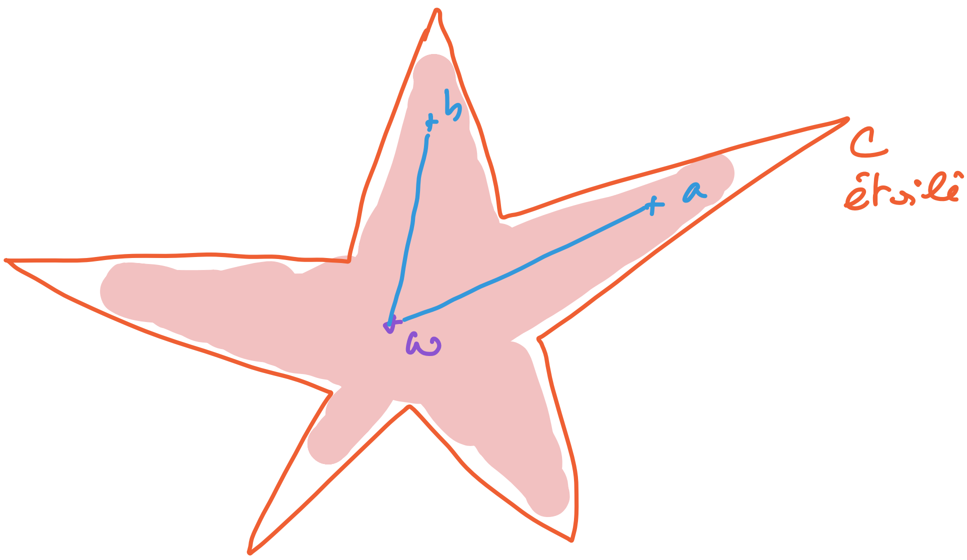
$t \longmapsto (1-t)a + tb$

$= a + t(b-a)$

φ est continue, à valeurs dans B et

$$\varphi(0)=a \quad \varphi(1)=b$$

donc B est convexe par arcs.



Mque si C est étoilé, alors C est convexe par arcs :

$\exists \omega \in C$ tq $\forall x \in C$, $[\omega, x] \subset C$

donc $\forall x \in C$, $\omega \mathcal{R} x$

Soit $a, b \in C$. Alors $\omega \mathcal{R} a$ et $\omega \mathcal{R} b$

donc, par symétrie et transitivité,

$$a \mathcal{R} b$$

(a et b sont dans la composante connexe de ω)

Exemple. Une partie convexe de E est connexe par arcs.

Définition. Une partie A de E est **étoilée** s'il existe $a \in A$ tel que :

$$\forall x \in A,\ [a, x] \subset A$$

où $[a, x]$ désigne le segment d'extrémités a et x :

$$[a, x] = \{(1-t)a + tx,\ t \in [0, 1]\}$$

Proposition. Une partie étoilée de E est connexe par arcs.

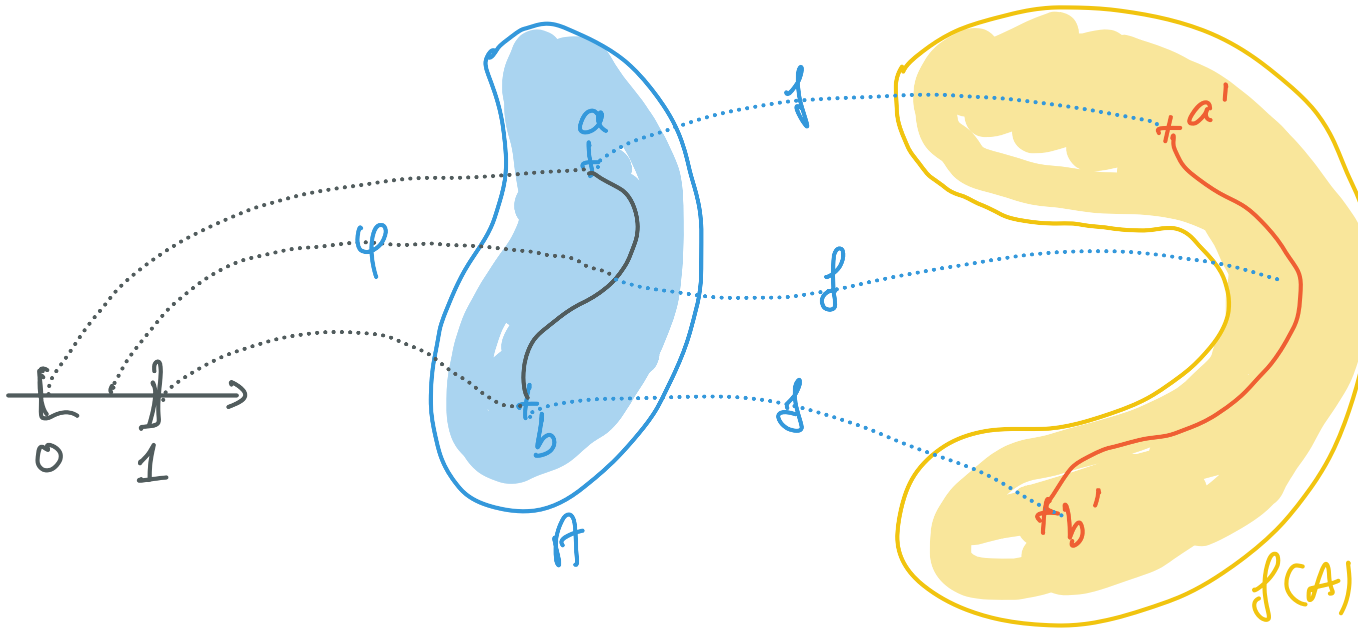
1.3 Image d'un connexe par arcs par une application continue

Théorème.

> Soit E et F deux espaces vectoriels normés, $f : E \to F$ et A une partie de E.
> Si A est connexe par arcs et f continue, alors $f(A)$ est connexe par arcs.

Preuve:

$$E \xrightarrow{f} F$$



Soit $a', b' \in f(A)$

$\exists a, b \in A$ tq $a' = f(a)$, $b' = f(b)$

Comme A est connexe par arcs,

$\exists \varphi : [0,1] \to A$ continue, tq

$\forall t \ \varphi(t) \in A$

$\varphi(0) = a \ , \ \varphi(1) = b$

Posons: $\psi : [0,1] \to F$

$t \longmapsto f \circ \varphi(t)$

- φ est continue car f et φ le sont
- $\varphi(0) = f(\varphi(0)) = f(a) = a'$
- $\varphi(1) = b'$
- $\forall t, \varphi(t) \in A$ donc $f(\varphi(t)) \in f(A)$

donc a' et b' sont liés dans $f(A)$

donc $f(A)$ connexe par arcs.

Exemple. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{ M \text{ tq } \det(M) \neq 0 \}$$

Si $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, alors

$\det(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ est connexe par arcs

$\|$

$\mathbb{R}^*$

pas connexe par arcs !

$\mathbb{R}^*$

2 Le cas de $\mathbb{R}$

Proposition. Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Remarque. *Ainsi, dans $\mathbb{R}$, les trois expressions « connexe par arcs », « convexe » et « intervalle » désignent la même notion. C'est spécifique à $\mathbb{R}$.*

Preuve : $\boxed{\Leftarrow}$ un intervalle est convexe donc convexe par arcs

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $A \subset \mathbb{R}$ convexe par arcs.

Soit $a, b \in A$ avec $a < b$ par ex.

Soit c tq $a < c < b$. Mq $c \in A$

A convexe par arcs, donc $\exists \varphi$ chemin continu joignant a et b dans A :

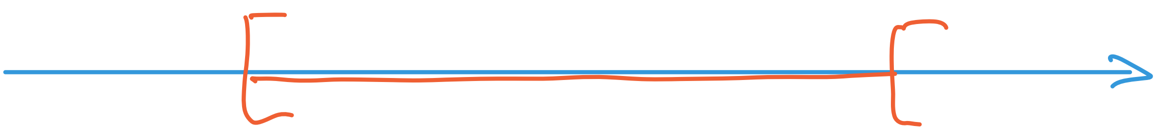
$$\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\forall t\ \varphi(t) \in A$, $\varphi(0) = a$ $\varphi(1) = b$.

c est une valeur intermédiaire entre a et b et φ est continue, donc par le th des valeurs intermédiaires, $\exists t \in [0,1]$ tq

$$\underbrace{\varphi(t)}_{\in A} = c.$$

donc $c \in A$.



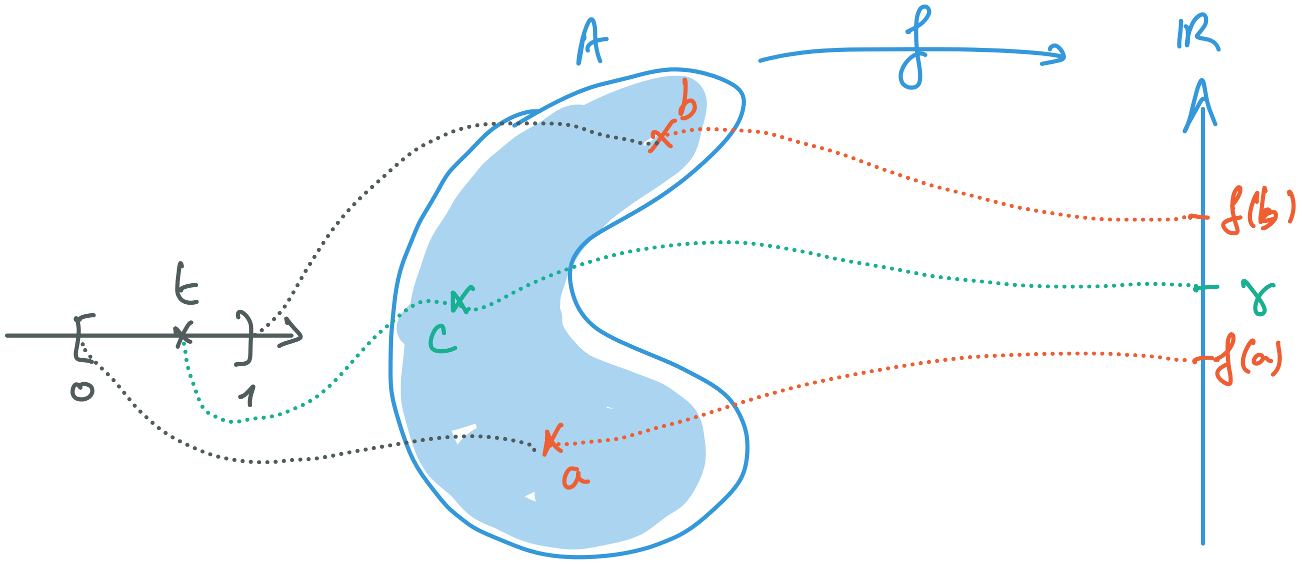
Théorème des valeurs intermédiaires.

> Soit $f : A \subset E \to \mathbb{R}$. Si f est continue, et que A est connexes par arcs, alors f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires : pour tout $a, b \in A$, f prend toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.

Remarque.

- *La conclusion peut aussi s'écrire : $f(A)$ est un intervalle.*
- *Dans le cas où $f(a) \leqslant f(b)$, pour tout γ tel que $f(a) \leqslant \gamma \leqslant f(b)$, il existe $c \in A$ tel que :*

$$\gamma = f(c)$$



On suppose $f(a) < \gamma < f(b)$ où $a, b \in A$

Par connexité par arcs, $\exists\, \varphi : [0,1] \to A$

tq φ continue, $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$, $\forall t\ \varphi(t) \in A$

Donc $f \circ \varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

Continue et $f\circ\varphi(0) = a < \gamma < f\circ\varphi(1)$.

Donc par le th des val. intermédiaires,

$\exists\, t_0 \in]0,1[$ tq $f\circ\varphi(t_0) = \gamma$

On note $c = \varphi(t_0) \in A$

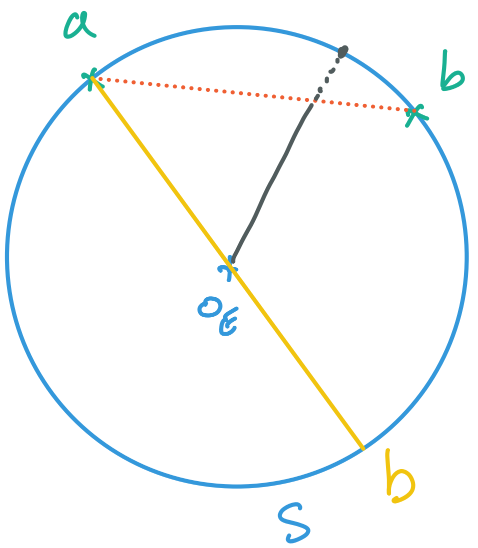
et $f(c) = \gamma$.

3 Caractérisation des fonctions de plusieurs variables qui sont constantes

Théorème.

> Soit $f : E \to F$ une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert, avec E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie. On suppose U connexe par arcs. Alors :
>
> $$f \text{ est constante sur } u \iff \mathrm{d}f \text{ est nulle sur } U$$

$\boxed{48.13}$



Soit $a, b \in S$, et $a+b \neq 0$ (pas diam opposés)

On note $\varphi : [0,1] \longrightarrow E$

$t \longmapsto a + t(b-a)$
$= (1-t)a + tb$

$\forall t \in [0,1], \ \varphi(t) \neq 0$

On note $\psi(t) = \dfrac{\varphi(t)}{\|\varphi(t)\|}$

ψ est continue car φ l'est et $\|.\|$ l'est

$\forall t \ \psi(t) \in S, \quad \psi(0) = a, \quad \psi(1) = b$

2^e cas : Si a, b diamétralement opposés.

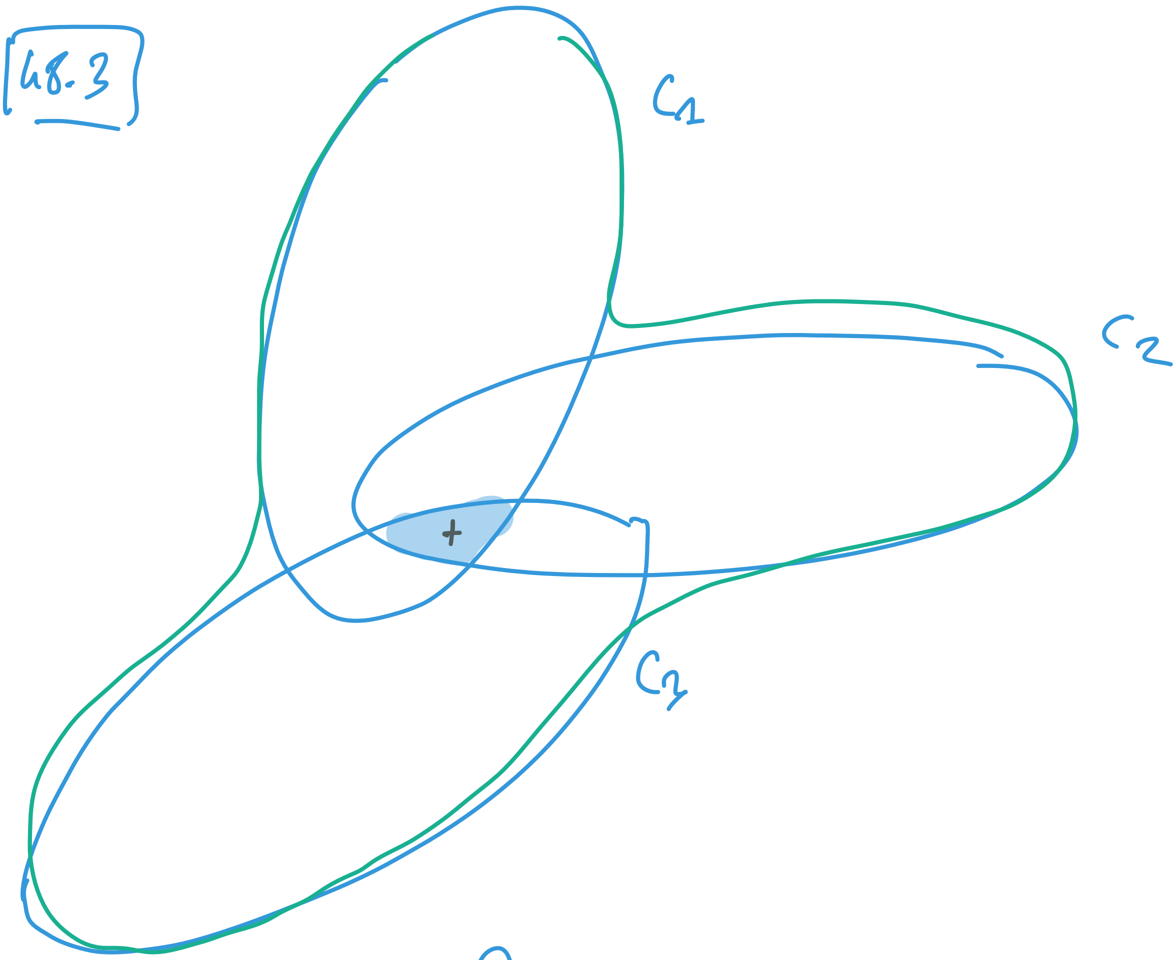
Car $n \geq 2$ On utilise $c \in S$, $c \neq a$, $c \neq b$

alors par 1^{er} cas, a et c sont dans

la même composante convexe, b et c aussi,

donc a et b aussi.

48.3



Soit $\omega \in \bigcap_{i \in I} C_i$

$\forall x \in \bigcup_{i \in I} C_i$, $\exists i \in I$ tq $x \in C_i$

or $\omega \in C_i$

donc $[\omega, x] \subset C_i \subset \bigcup_{i \in I} C_i$

Ainsi $\bigcup_{i \in I} C_i$ est étoilé donc convexe par arc.

$\boxed{48.2}$

(a) Soit $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$

$a_1, a_2 \in A$ connexe par arcs, donc

$\exists \varphi : [0,1] \longrightarrow A$ tq

φ continue, $\forall t\ \varphi(t) \in A$, $\varphi(0) = a_1$ $\varphi(1) = a_2$

de même $\exists \psi : [0,1] \longrightarrow B$ tq

ψ continue, $\forall t\ \psi(t) \in B$ $\psi(0) = b_1$, $\psi(1) = b_2$

On définit

$$f : [0,1] \longrightarrow A \times B$$
$$t \longmapsto (\varphi(t), \psi(t))$$

continue, à val dans $A \times B$

et $f(0) = (a_1, b_1)$ $f(1) = (a_2, b_2)$

donc $A \times B$ connexe par arcs.

(b) $$g : A \times B \longrightarrow E$$
$$(a, b) \longmapsto a + b$$

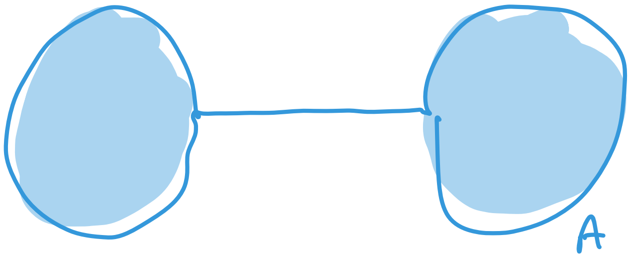
est continue et $A \times B$ est connexe par arcs

donc $g(A \times B) = A + B$ est connexe par arcs.

$\boxed{48.1}$

(a) $A : [0,1] \cup \{2\}$ non convexe par arcs

$\mathring{A} =]0,1[$ convexe par arcs

(b) 

(c) $\overline{]0,1[\cup]1,2[} = [0,2]$

$\boxed{48.4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}$

<u>Mque $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est étoilé.</u>

Soit $M \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Mque $[0\,M] \subset \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$

<u>en effet</u> : $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$t \longmapsto tM$

φ est continue, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = M$

$\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, D diag tq $M = PDP^{-1}$

donc $\varphi(t) = P\underbrace{(tD)}_{\text{diag}}P^{-1} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$

$\boxed{48.5}$ Soit $A \in SO_n(\mathbb{R})$

$B \in O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$

Si $\exists \varphi : [0,1] \longrightarrow O_n(\mathbb{R})$ continue

tq $\varphi(0) = A$, $\varphi(1) = B$

Alors $\det \circ \varphi$ continue

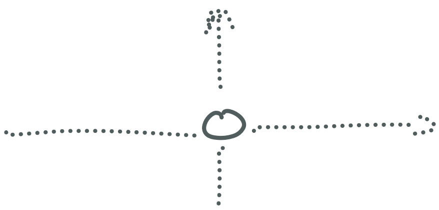
et $\det(A) = 1$, $\det(B) = -1$

Par le th des valeurs intermédiaires,

$\exists C \in O_n(\mathbb{R})$ tq $\det(C) = 0$

contradiction

$\mathbb{R}^*$ non connexe par arcs



$\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs

$\boxed{48.6}$ $GL_n(\mathbb{C})$ connexe par arcs

Rque toute matrice de $GL_n(\mathbb{C})$ est dans la composante connexe de I_n

Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$

M trigonalisable

$\exists\ P \in GL_n(\mathbb{C})$ T triangulaire tq

$$M = P\,T\,P^{-1}$$

où $$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où les $\lambda_j \neq 0$

$$\lambda_j = r_j\, e^{i\theta_j} \qquad \text{où } r_j > 0$$

Notons

$$\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

$$t \longmapsto P \begin{pmatrix} r_1^t e^{it\theta_1} & & t\mu_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & r_n^t e^{it\theta_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

φ est continue, à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$

$\varphi(0) = P\, I_n\, P^{-1} = I_n$

$\varphi(1) = M$