Emploi du temps $\quad y' = ay + b(t) \quad a \in \mathbb{K}$

3 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

3.1 Position du problème

Définition.

- On appelle **système différentiel linéaire à coefficients constants** :

$$X' = AX + B(t) \tag{S}$$

constante

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est continue.

- Résoudre (S), c'est déterminer les fonctions $X : I \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\forall t \in I,\ X'(t) = AX(t) + B(t)$$

- On appelle **système différentiel homogène associé à** (S) :

$$X' = A\cancel{(t)}X \tag{H}$$

Remarque. *Un système différentiel linéaire à coefficients constant s'écrit aussi :*

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}a_n + b_1(t) \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}a_n + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}a_n + b_n(t) \end{cases}$$

où les a_{ij} sont des scalaires (constantes) et les b_i des fonctions continues sur I intervalle.

Proposition.

- L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) est un espace vectoriel de dimension n.
- L'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions de (E) est un espace affine de dimension n, dirigé par $\mathcal{S}_H$:

$$\mathcal{S}_E = X_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

Écriture vectorielle. Un sysème différentiel linéaire à coefficients constant peut être vu comme la traduction matricielle d'une équation différentielle linéaire :

$$x' = a \cdot x + b(t) \tag{E}$$

où $a \in \mathcal{L}(E)$ et $b : I \to E$ est continues, et où on note $a \cdot x$ l'image $a(x)$ du vecteur x par l'endomorphisme a.

Remarque. *On pourrait présenter les résultats de ce paragraphe sous forme vectorielle.*

3.2 Résolution théorique à l'aide de l'exponentielle de matrice

Rappel sur l'exponentielle de matrice. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit :

$$\exp(tA) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

- $t \mapsto \exp(tA)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée est $t \mapsto A\exp(tA) = \exp(tA)A$.
- $\exp(A)$ est inversible, et $\big(\exp(A)\big)^{-1} = \exp(-A)$.
- Si A et B sont deux matrices qui commutent :

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$$

Résultat : solutions du système différentiel homogène.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les solutions du système différentiel homogène :

$$X' = AX$$ A constant

sont les applications :

$$t \mapsto \exp(tA)C$$

où $C \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

Remarque. *Dans l'écriture précédente, $\exp(tA)$ désigne une matrice carrée, C une matrice colonne. On peut rapprocher l'expression des solutions de :*

$$t \mapsto \lambda e^{ta}, \ \lambda \in \mathbb{K}$$

qui est l'expression des solutions de l'équation scalaire $y' = ay$, mais la généralisation doit se faire correctement.

$$S_H = \{ t \mapsto \exp(tA)C, \quad C \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \}$$

$$= \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{t \mapsto \exp(tA)\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}}_{X_1}, \ t \mapsto \exp(tA)\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \dots \Big)$$

⚠ $\exp(tA)\ C$

$\exp(tA)$ C

<u>Justif.</u> $X_1(t) = \exp(tA)\,E_1$ $\qquad E_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$

$X_1'(t) = A\exp(tA)\,E_1$

$= A.\,X_1(t)$

donc $X_1 \in S_H$

de même $X_2, \dots, X_n \in S_H$

Mq $(X_1 \dots X_n)$ libre

Soit $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tq $\alpha_1 X_1 + \dots \alpha_n X_n = 0$

ie $\forall t \quad \exp(tA)(\alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_n E_n) = 0$

donc $\exp(-tA)\exp(tA)(\alpha_1 E_1 \dots + \alpha_n E_n) = 0$

$\alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_n E_n = 0$

donc $\alpha_1 \dots \alpha_n = 0$

Résultat : obtention d'une solution particulière par variation de la constante.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ continue. Pour résoudre le système différentiel à coefficients constants :

$$X' = AX + B(t) \tag{E}$$

on a intérêt à effectuer le changement de fonction inconnue :

$$X(t) = \exp(tA)C(t)$$

où $C : I \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est $\mathcal{C}^1$.

3.3 Problème de Cauchy

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ continue. Soit $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. On appelle **problème de Cauchy** le problème :

$$\begin{cases} X' = AX + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Théorème de Cauchy linéaire.

Le problème de Cauchy admet une et une seule solution définie sur I.

$$X \text{ sol} \iff \begin{cases} \forall t \in I, \quad X'(t) = A\,X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

on effectue un changement de fonction inconnue

$$X(t) = \exp(tA)\,C(t)$$

$$X'(t) = A\exp(tA)\,C(t) + \exp(tA)\,C'(t)$$

$$\iff \begin{cases} \forall t \in I \quad \exp(tA)\,C'(t) = B(t) \\ \exp(t_0 A)\,C(t_0) = X_0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall t \in I \quad C'(t) = \exp(-tA)\,B(t) \\ C(t_0) = \exp(-t_0 A)\,X_0 \end{cases}$$

$$\iff \forall t \in I \quad C(t) = \exp(-t_0 A)\,X_0 + \int_{t_0}^{t} \exp(-uA)\,B(u)\,du$$

$$\iff \forall t \in I \quad X(t) = \exp(tA)\exp(-t_0 A)\,X_0 + \exp(tA)\int_{t_0}^{t} \exp(-uA)\,B(u)\,du$$

$\iff \forall t \in I \quad X(t) = \exp\left((t-t_0)A\right) X_0$ $\quad$ tA et $-t_0A$ commutent

$$+ \int_{t_0}^{t} \underbrace{\exp(tA)\exp(-uA)B(u)}_{\exp((t-u)A)B(u)}\, du$$

A-t-on ? $\quad M \int_I V(u)\, du = \int_I M V(u)\, du$?

où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad V(u) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \times \int_I \begin{pmatrix} v_1(u) \\ \vdots \\ v_n(u) \end{pmatrix} du$$

$$= \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \int_I v_1(u)\, du \\ \vdots \\ \int_I v_n(u)\, du \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} m_{1j} \int_I v_j(u)\, du \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} m_{nj} \int_I v_j(u)\, du \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \int_I \sum_{j=1}^{n} m_{ij} v_j(u)\, du \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \int_I \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \cdot v_j(u) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} du$$

$$= \int_I M V(u) \, du$$

3.4 Résolution effective dans le cas de diagonalisabilité

On suppose dans ce paragraphe que A est diagonalisable :

$$A = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } P = (V_1|\dots|V_n)$$

Les λ_i sont les valeurs propres de A, et les V_i forment une base de vecteurs propres associés.

3.5 Exemples de résolution effective en dimension 2

Exemple. Résoudre le système différentiel $X' = AX$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -29 & -50 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}$$

Exemple. Résoudre :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + t \\ y'(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases}$$

$X' = AX$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Réduisons A

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $P = (V_1|V_2)$ avec $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $S_H = \{t \mapsto \exp(tA)C, \text{ où } C \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})\}$

avec

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \exp(tPDP^{-1}) \\ &= \exp(P(tD)P^{-1}) \\ &= P\exp(tD)P^{-1} \end{aligned}$$

savoir justifier

$$= P \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$S_H = \left\{ t \mapsto (V_1 | V_2) \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} P^{-1}C, \quad C \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \right\}$$

lorsque C parcourt $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

$P^{-1}C$ parcourt $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

$$= \left\{ t \mapsto (V_1 | V_2) \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} C_2, \quad C_2 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(t \mapsto (V_1 | V_2) \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. t \mapsto (V_1 | V_2) \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

où $(V_1 | V_2) \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} = \left(e^{3t} V_1 \,\middle|\, e^{t} V_2 \right)$

$$S_H = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{3t} V_1, \ t \mapsto e^{t} V_2 \right)$$

$$= \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda e^{3t} + \mu e^{t} \\ \lambda e^{3t} - \mu e^{t} \end{pmatrix}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2 \right)$$

$X' = AX$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

- <u>Réduction de A</u>

$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 2 & X+1 \end{vmatrix} = X^2 - 1 + 2 = X^2 + 1$

$= (X-i)(X+i)$

$E_i(A) = \mathrm{Ker}(A - iI_2)$

$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -2 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}$

$-2 \times 1 + (-1-i)(-1+i)$

$= -2 + (1+1) = 0$

$= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}$

$E_{-i}(A) = \overline{E_i(A)}$ car A est réelle

$= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix}$

donc les sol. complexes :

$S_H = \{ t \mapsto e^{tA} C, \quad C \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C}) \}$

$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} P^{-1}$

$= \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \left(t \mapsto e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}, t \mapsto e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} \right)$

Solutions réelles ? pour A réelle

z sol complexe $\iff$ $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ sont sol réelles.

Donc les sol réelles :

$$\mathrm{Re}\left(e^{it}\begin{pmatrix}1\\-1+i\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\cos t\\-\cos t-\sin t\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Im}\left(e^{it}\begin{pmatrix}1\\-1+i\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\sin t\\-\sin t+\cos t\end{pmatrix}$$

donc $S_H^{\mathbb{R}}=\mathrm{Vect}\left(t\mapsto\begin{pmatrix}\cos t\\-\cos t-\sin t\end{pmatrix},\ t\mapsto\begin{pmatrix}\sin t\\\cos t-\sin t\end{pmatrix}\right)$

Rmq. On peut aussi raisonner :

$\chi_A=X^2+1$ donc $A^2=-I_2$

donc par réc $A^{2k}=(-1)^k I_2$

$A^{2k+1}=(-1)^k A$

donc $$\sum_{k=0}^{2N+1}\frac{1}{k!}(tA)^k=\sum_{\substack{k=0\\k\text{ pair}}}^{2N+1}+\sum_{\substack{k=0\\k\text{ impair}}}^{2N+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{(2k)!}t^{2k}A^{2k}+\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{(2k+1)!}t^{2k+1}A^{2k+1}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \right) I_2 + \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k+1} \right) A$$

$$\xrightarrow[N \to +\infty]{} \underbrace{\cos t \; I_2 + \sin t \; A}_{\text{c'est } \exp(tA)}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & \sin t \\ -2 \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

Donc $S_H = \{ t \mapsto \exp(tA) C, \; C \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \}$

$$= \mathrm{Vect} \left(t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -2 \sin t \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} -29 & -50 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 - 5 - 150 \\ -100 + 10 + 93 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1 est vp $\quad \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} \in E_1(A)$

$\mathrm{tr}\, A = 2 \quad$ donc 1 vp double

A n'est pas diagonalisable (sinon semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc égale à I_2)

$\chi_A = (X-1)^2$

donc $(A - I_2)^2 = 0$ (Cayley-Hamilton)

On note $N = A - I_2$

On a $A = I_2 + N$, I_2 et N commutent.

$$\exp(tA) = \exp(tI_2 + tN)$$
$$= \exp(tI_2)\exp(tN)$$
$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}(I_2 + tN)$$

$N = \begin{pmatrix} -30 & -50 \\ 18 & 30 \end{pmatrix}$

$$= e^t(I_2 + tN)$$
$$= e^t \begin{pmatrix} 1-30t & -50t \\ 18t & 1+30t \end{pmatrix}$$

Donc $S_H = \{ t \mapsto \exp(tA)C,\ C \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R}) \}$

$$= \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \exp(tA)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \mapsto \exp(tA)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^t\begin{pmatrix} 1-30t \\ 18t \end{pmatrix}, t \mapsto e^t\begin{pmatrix} -50t \\ 1+30t \end{pmatrix}\right)$$

Exemple. Résoudre :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + t \\ y'(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases}$$

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

On réduit A : [...]

$$A = PDP^{-1} \quad \text{où} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On effectue le changement de fct inconnue :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(tA)\, C(t)$$
$$= \exp(tA) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

$$X'(t) = A \exp(tA) C(t) + \exp(tA) C'(t)$$

X sol de $(E) \Leftrightarrow \forall t \quad \exp(tA) C'(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \forall t \quad \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \exp(-tA) \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $\exp(-tA) = P \left(\exp(-tD)\right) P^{-1}$

$$= P \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{+2t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

or $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\det P = 4$

$$\mathrm{Com}\, P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{\det P} (\mathrm{Com}\, P)^T$$

X sol

$$\iff \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}}^{\exp(-tD)} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3t \\ -t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3te^{-2t} \\ -te^{2t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3te^{-2t} + te^{2t} \\ 3te^{-2t} - 3te^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists \lambda_1 \text{ tq } c_1(t) = \lambda_1 + \frac{1}{4} \int_0^t 3ue^{-2u} + ue^{2u} \, du$$

I. P. P.

[...]

$\boxed{69.17}$