Modification d'emploi du temps

Lundi 17 mars MPI - MPI*

math $7^h45 - 11^h40$ B317

Mercredi 19 mars MPI - MPI*

DS anglais $7^h45 - 11^h40$ B317 - B310

MPI*

Français $13^h35 - 15^h25$ B317

MPI

Anglais $13^h35 - 15^h25$ salle habituelle

Conseil de classe

Me 2 avril 11^h45

Dossiers UTC etc...

Planning des semaines à venir

Il est en cours d'élaboration. Bientôt !

Bourse Sicard

Se signaler à Kadiata DIAGNE

au secrétariat élèves

TIPE

pour ceux qui passent avec moi : envoi du

diaporama en PDF via http://envoi.lamartin.fr

au minimum 24^h à l'avance.

B317. On peut assister à la présentation.

Résolution pratique des équations différentielles linéaires

Sauf mention contraire, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé de dimension finie.

1 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

1.1 Position du problème, structure des solutions

y fct inconnue : $I \to \mathbb{K}$

Définition. Une **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre** 1 est une équation de la forme :

$$y' + a(x)y = b(x) \qquad (E)$$

et l'équation homogène associée est :

$$y' + a(x)y = 0 \qquad (H)$$

où a et b sont des applications continues sur I intervalle.

Remarque. *L'équation peut être proposée sous la forme :*

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$$

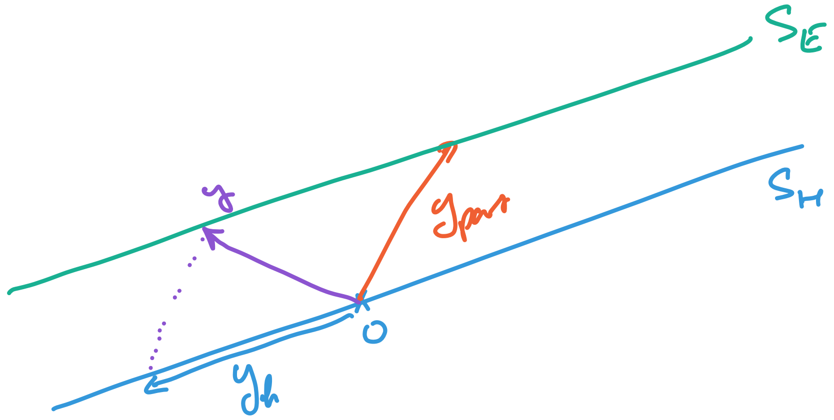
Il importe dans ce cas de travailler sur un **intervalle** *sur lequel α* **ne s'annule pas** *: l'équation doit être* **normalisable** *sur I.*

Structure des solutions. Si a et b sont continues et I est un intervalle, alors

- $\mathcal{S}_H$ est une droite vectorielle
- $\mathcal{S}_E$ est une droite affine dirigée par $\mathcal{S}_H$:

$$\mathcal{S}_E = y_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

$\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$



1.2 Résolution : première méthode

Méthode.

1. On qualifie l'équation différentielle, en précisant la continuité des coefficients, le fait qu'on travaille sur un intervalle et on écrit l'équation sous forme normalisée.

2. On trouve une solution particulière notée y_{part} de (E), par exemple en la cherchant sous une forme particulière.

3. On utilise le résultat exprimant $\mathcal{S}_H$: notant A une primitive de a sur I, $\mathcal{S}_H = \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{-A(x)})$.

4. On conclut :
$$\mathcal{S}_E = y_{part} + \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{-A(x)})$$

Remarque. *La méthode de variation de la constante, vue en première année, permet de déterminer une solution particulière lorsque l'on a déterminé $\mathcal{S}_H$. Voir aussi la section suivante.*

Exemple. Résoudre l'équation :
$$x' + x = t^2$$

$(t \mapsto t^2 - 2t + 2) + \mathrm{Vect}(t \mapsto e^{-t})$

Exemple. Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation :

$$xy' - y = x^3$$

$\left(x \mapsto \frac{x^3}{2}\right) + \mathrm{Vect}(x \mapsto x)$

1.3 Résolution : seconde méthode

Méthode.

1. Au brouillon, on calcule A une primitive de a sur I.
2. On effectue le changement de fonction inconnue :

$$y(x) = z(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$$

en raisonnant bien par équivalence.

Exemple. Résoudre l'équation :

$$(1+x^2)y' - 2xy = 1 + x^2$$

$$\int -\frac{2x}{1+x^2}\,dx = -\ln(1+x^2) + \text{cste} \qquad e^{-(-\ln(1+x^2))} = 1+x^2$$

On effectue le changement de fonction inconnue :

$$y(x) = z(x)(1+x^2) \qquad (-2x) \quad \lambda(x)(1+x^2)$$

$$y'(x) = z'(x)(1+x^2) + z(x)\,2x \quad \times(1+x^2)$$

y sol de (E) sur $\mathbb{R}$ $\iff \forall x \in \mathbb{R} \quad (1+x^2)y'(x) - 2xy(x) = 1+x^2$

$\iff \forall x \in \mathbb{R} \quad z'(x)(1+x^2)^2 = 1+x^2$

$\iff \forall x \in \mathbb{R} \quad z'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $\mathbb{R}$ intervalle

$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R} \quad z(x) = \operatorname{Arctan} x + \lambda$

$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) = (\operatorname{Arctan} x + \lambda)(1+x^2)$

$$\left(x \mapsto (x^2+1)\operatorname{Arctan} x\right) + \operatorname{Vect}\left(x \mapsto (x^2+1)\right)$$

1.4 Résolution sur un intervalle sur lequel l'équation n'est pas normalisable

Méthode. Si l'équation n'est pas normalisable sur l'intervalle I de résolution, on partage I en sous-intervalles sur lesquels l'équation est normalisable. On résout sur chacun de ces intervalles, puis on effectue un **recollement** des solutions.

Exemple. Représenter quelques courbes intégrales et déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles :

$$xy' - y = 0 \qquad xy' - 2y = 0 \qquad xy' - \frac{1}{2}y = 0$$

$\boxed{1}$ $xy' - y = 0$

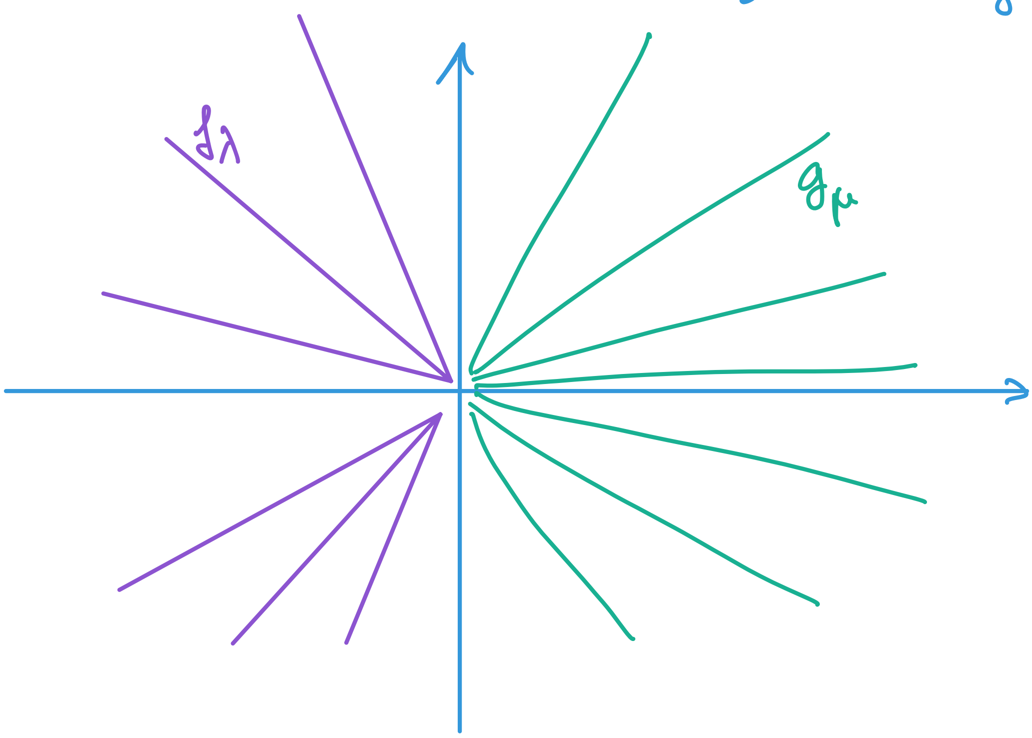
- Sur $I_1 =]-\infty, 0[$ ou $I_2 =]0, +\infty[$ EDL1 homogène
intervalle, continu

$$S_H^{I_k} = \left\{ \begin{array}{ccc} I_k & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda_k e^{+\ln|x|} \end{array} \quad \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{ccc} I_k & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda_k |x| \end{array} \quad \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{ccc} I_k & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda'_k x \end{array} \quad \lambda'_k \in \mathbb{R} \right\}$$

car x ne s'annule pas sur I_k
donc ne change pas de signe.



$\forall \lambda, \mu \quad f_\lambda(x) = \lambda x \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$

$$0 \xleftarrow[x \to 0^+]{} \mu x = g_\mu(x)$$

le raccordement est toujours continu.

$$f'_\lambda(x) = \lambda \xrightarrow[x \to 0^-]{} \lambda$$

$$\mu \xleftarrow[x \to 0^+]{} \mu = g'_\mu(x)$$

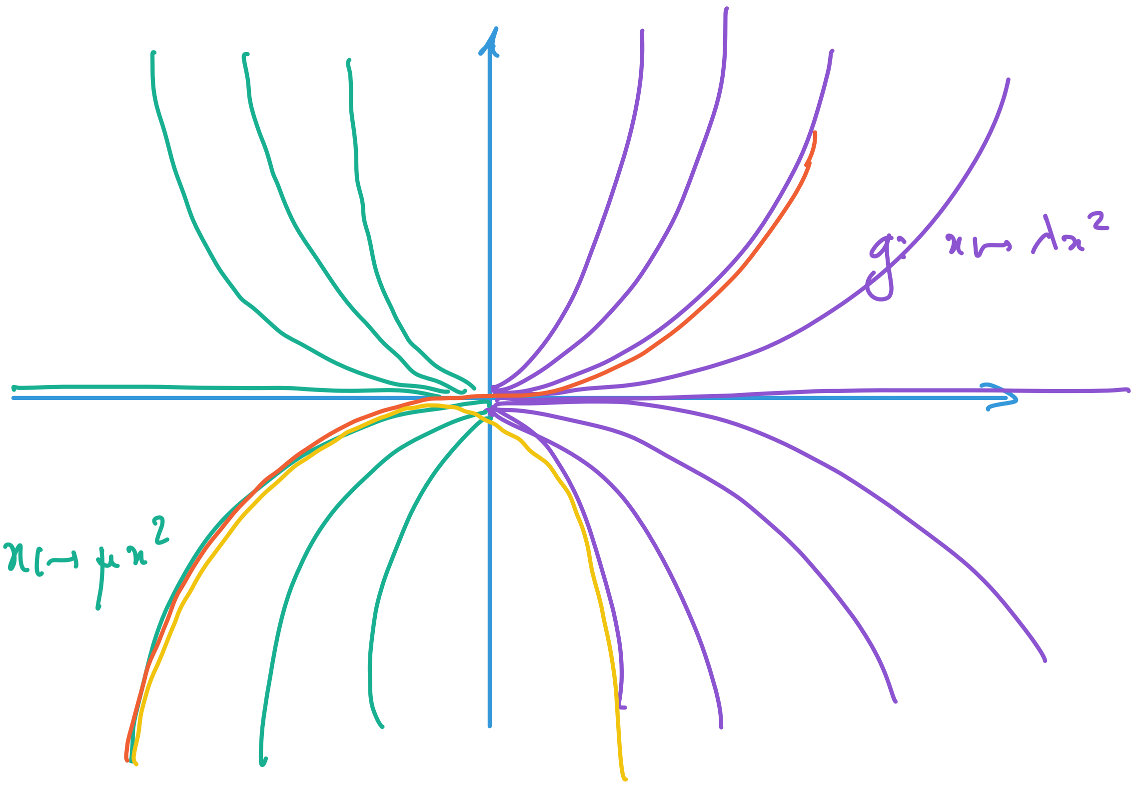
Par limite de la dérivée, le raccordement est dérivable

<u>ssi</u> : $\lambda = \mu$

$$S^{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda x \end{array} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

• 2 $xy' - 2y = 0$ $\quad \int -\frac{2}{x}\,dx = -2\ln|x|$

[...] $\quad \lambda|x|^2$



$$f(x) = \mu x^2 \xrightarrow[x<]{x\to 0} 0 \xleftarrow[x<]{x\to 0} \lambda x^2 = g(x)$$

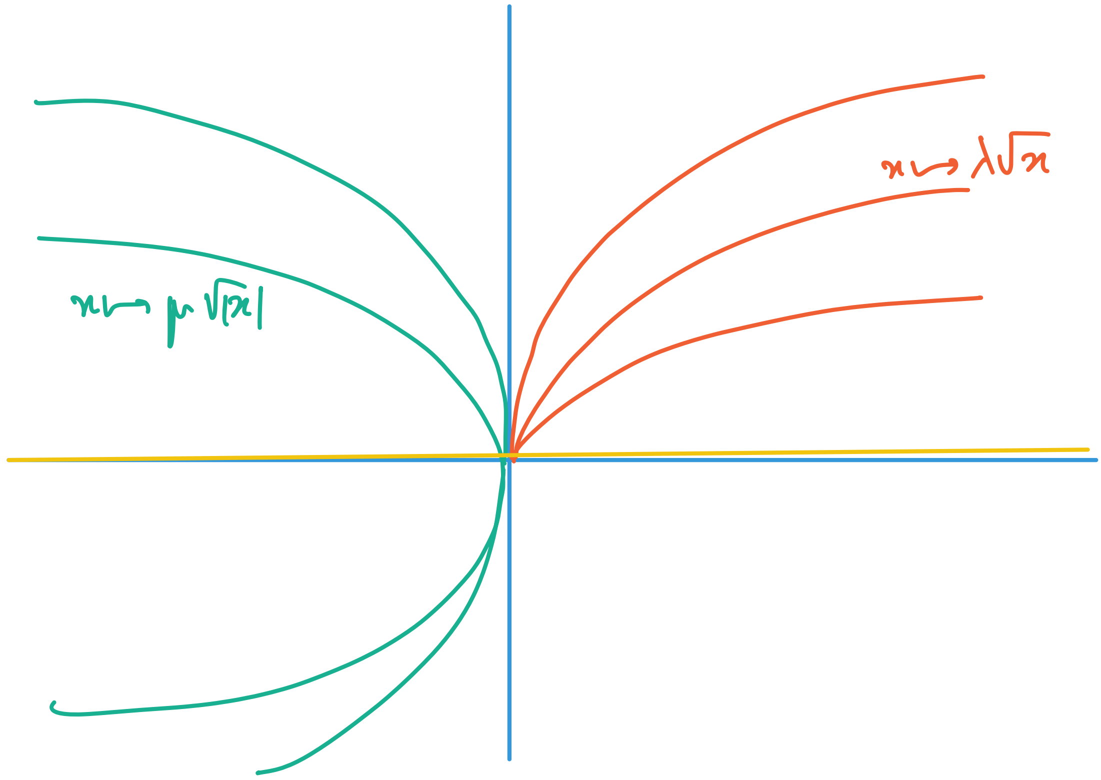
$$f'(x) = 2\mu x \xrightarrow[x<]{x\to 0} 0 \xleftarrow[x>]{x\to 0} 2\lambda x = g'(x)$$

Par limite de la dérivée, tout raccordement de f_λ et g_μ est dérivable.

$$S^{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \lambda x^2 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ \mu x^2 & \text{si } x>0 \end{cases} \end{array} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

ev de dim 2.

③



$$f(x) = \mu\sqrt{-x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0 \xleftarrow[x \to 0^+]{} \lambda\sqrt{x} = g(x)$$

le raccordement est continu.

$$f'(x) = \mu(-)\frac{1}{2\sqrt{-x}} \xrightarrow[x \to 0^-]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \mu < 0 \\ -\infty & \text{si } \mu > 0 \\ 0 & \text{si } \mu = 0 \end{cases}$$

de même pour g

le raccordement est dérivable en 0

<u>ssi</u> $\lambda = 0 = \mu$

$$S^{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array} \right\}$$ ev de dim 0

$y : t \mapsto y(t) \in \mathbb{K}$

2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

2.1 Position du problème, structure des solutions

Définition. Une **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2** est une équation de la forme :

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t) \qquad (E)$$

et l'équation homogène associée est :

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \qquad (H)$$

où a, b et c sont des applications continues sur I intervalle.

Remarque. *L'équation peut être proposée sous la forme :*

$$\alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \delta(t)$$

Il importe dans ce cas de travailler sur un ***intervalle*** *sur lequel α* ***ne s'annule pas*** *: l'équation doit être* ***normalisable*** *sur I.*

Remarque. *Contrairement aux équations d'ordre 1 ou aux équations d'ordre 2 à coefficients constants, il n'y a pas de formule de résolution. Il n'est donc pas utile d'avoir une équation normalisée, mais il est important qu'elle soit normalisable : α ne doit pas s'annuler sur I.*

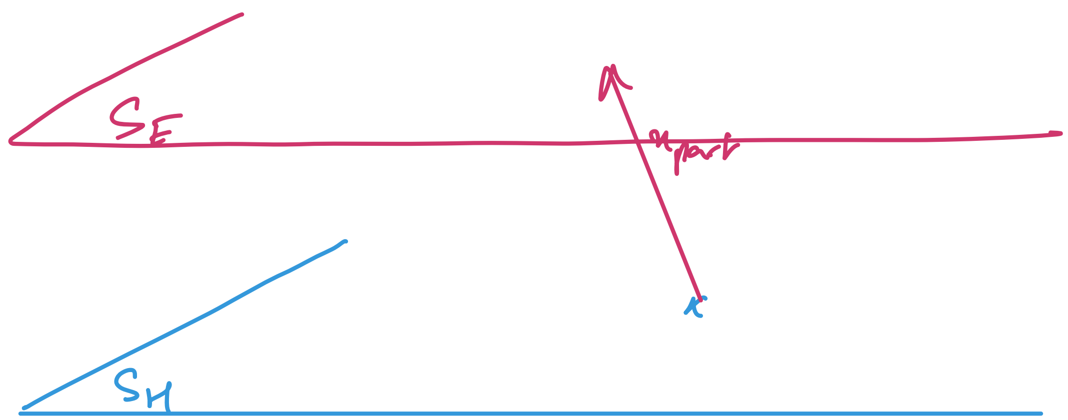
Remarque. *On présente au § 4.3 une méthode de résolution lorsqu'une solution de (H) est connue.*

Structure des solutions. Si α, β et γ continues, I est un intervalle et α ne s'annule pas sur I, alors

- $\mathcal{S}_H$ est un plan vectoriel
- $\mathcal{S}_E$ est un plan affine dirigé par $\mathcal{S}_H$:

$$\mathcal{S}_E = x_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

$\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$

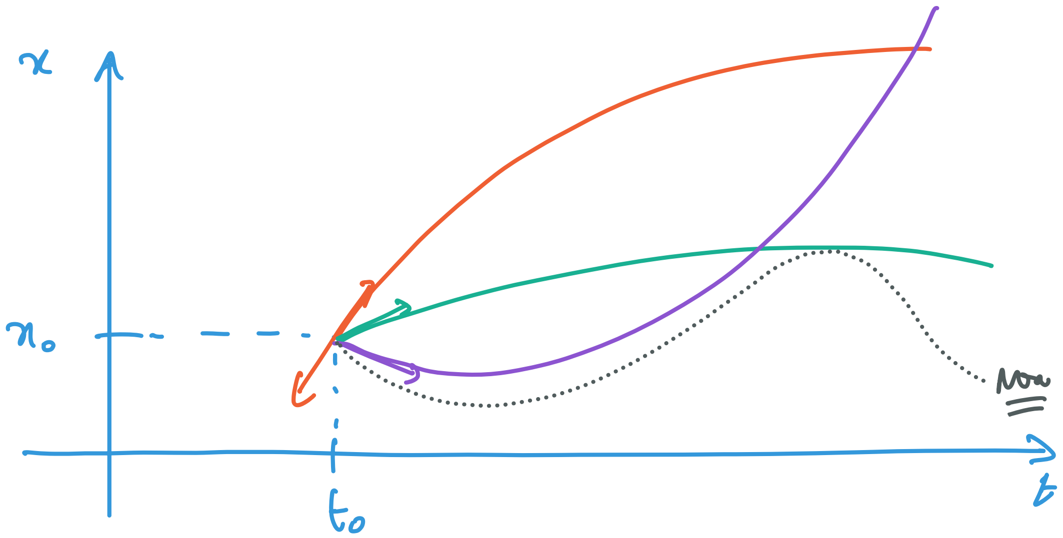


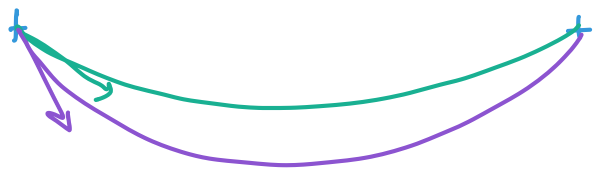
Définition. Un problèmde de Cauchy donné par :

$$\begin{cases} \alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \delta(t) \\ \underbrace{x(t_0) = x_0}\underbrace{x'(t_0) = x'_0} \end{cases}$$

où α, β, γ et δ sont continues sur I intervalle, α ne s'annule pas sur I, $t_0 \in I$.
Il admet une et une seule solution.

Remarque. *Avec la seule condition $x(t_0) = x_0$, ou avec des conditions aux limites comme $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$, on ne peut garantir l'existence et l'unicité.*





2.2 Étude de l'équation homogène — Wronskien

Étude. On suppose que a, b et c sont des applications continues sur I intervalle, et on note

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \qquad (H)$$

l'équation différentielle linéaire homogène scalaire étudiée. On a

$$\begin{aligned}(H) &\iff \begin{cases} x' &= x' \\ x'' &= -a(t)x' - b(t)x \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & -b(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \\ &\iff X' = A(t)X \quad \text{système différentiel noté } H_{\text{mat}}\end{aligned}$$

où $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ et $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & -b(t) \end{pmatrix}$.

Un couple (ϕ, ψ) est un système fondamental de solutions de (H), i.e. une base de $\mathcal{S}_H$, si et seulement si :

$$\left(\begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix} \right) \text{ est un système fondamental de solutions de } H_{\text{mat}}$$

Définition. Si ϕ et ψ sont deux solutions de (H) sur I, on définit leur **wronskien** en posant :

$$W \,:\, t \mapsto \begin{vmatrix} \phi(t) & \psi(t) \\ \phi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = \phi(t)\psi'(t) - \psi(t)\phi'(t)$$

Syst fond de solutions de H

S_H est un plan vectoriel $= \mathrm{Vect}(\phi, \psi)$

Exemple: $t^2 y'' + 4ty' + 2y = 0$

$S_H^{\mathbb{R}_+^*} = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \frac{1}{t}, t \mapsto \frac{1}{t^2}\right)$

Preuve: Mque: (ϕ, ψ) libre dans $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$

$\iff \left(\begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix} \right)$ libre dans $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{21}(\mathbb{K}))$

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit λ, μ tq $\lambda\phi + \mu\psi = 0$

ie $\forall t \quad \lambda\phi(t) + \mu\psi(t) = 0$

et en dérivant $\lambda\phi'(t) + \mu\psi'(t) = 0$

donc $\forall t \quad \lambda \begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \end{pmatrix}(t) + \mu \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

par liberté de $\begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}$

$$\lambda, \mu = 0$$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose (ϕ, φ) libre.

Mq $\left(\begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}\right)$ libre.

Soit λ, μ tq $\lambda \begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K}))}$

i.e. $\forall t \quad \lambda \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \phi'(t) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\quad \forall t \quad \lambda \phi(t) + \mu \varphi(t) = 0$

i.e. $\quad \lambda \phi + \mu \varphi = 0_{\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})}$

Par liberté, $\lambda, \mu = 0$

Exemple: avec $\phi(t) = \frac{1}{t}$ et $\varphi(t) = \frac{1}{t^2}$

$$W(t) = \begin{vmatrix} \frac{1}{t} & \frac{1}{t^2} \\ -\frac{1}{t^2} & -\frac{2}{t^3} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{2}{t^4} + \frac{1}{t^4} = \frac{-1}{t^4}$$

Théorème.

Soit ϕ et ψ sont deux solutions de (H) sur I et W le wronskien de ϕ et ψ. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) (ϕ, ψ) est une base de $\mathcal{S}_H$

(ii) $\forall t \in I,\ W(t) \neq 0$

(iii) $\exists t \in I,\ W(t) \neq 0$

Preuve : ϕ et ψ sont sol de (H)

$(H)\quad x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0$

à savoir • $\quad W(t) = \begin{vmatrix} \phi(t) & \psi(t) \\ \phi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix}$

$$= \phi(t)\psi'(t) - \phi'(t)\psi(t)$$

$$\begin{aligned} W'(t) &= \phi(t)\psi''(t) - \phi''(t)\psi(t) \\ &= \phi(t)\big(-a(t)\psi'(t) - b(t)\psi(t)\big) \\ &\quad - \big(-a(t)\phi'(t) - b(t)\phi(t)\big)\psi(t) \\ &= -a(t)\big(\underbrace{\phi(t)\psi'(t) - \phi'(t)\psi(t)}_{W(t)}\big) \end{aligned}$$

donc $W'(t) + a(t)W(t) = 0$

donc W est sol de l'EDL1 $\quad y' + a(t)y = 0$

donc, en notant A une primitive de a sur I

$\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $\forall t \in I \quad W(t) = \lambda e^{-A(t)}$

donc $\lambda = 0$ et $\forall t \; W(t) = 0$

ou

$\lambda \neq 0$ et $\forall t \; W(t) \neq 0$

donc (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

<u>(ii) $\Rightarrow$ (i)</u> on plutôt <u>$\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(ii)</u>

On suppose (ϕ, φ) liée

ie $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tq $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$

et $\forall t \in I \quad \lambda \phi(t) + \mu \varphi(t) = 0$

en dérivant, $\lambda \phi'(t) + \mu \varphi'(t) = 0$

$$\text{donc} \quad W(t) = \begin{vmatrix} \phi(t) & \varphi(t) \\ \phi'(t) & \varphi'(t) \end{vmatrix}$$

$= 0$ car $\lambda C_1 + \mu C_2 = 0$

où $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$

<u>(i) $\Rightarrow$ (iii)</u> On suppose (ϕ, φ) libre, donc base de S_H

Fixons $t_0 \in I$

On note $u : S_H \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$

$$f \longmapsto \begin{pmatrix} f(t_0) \\ f'(t_0) \end{pmatrix}$$

u est linéaire, bijective par le th de Cauchy-linéaire.

$$M = \mathrm{Mat}(u, (\phi, \psi), \mathrm{can}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} u(\phi) & u(\psi) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \phi(t_0) & \psi(t_0) \\ \phi'(t_0) & \psi'(t_0) \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

$$u(\phi) = \begin{pmatrix} \phi(t_0) \\ \phi'(t_0) \end{pmatrix}$$

u isomorphisme donc $\det(M) \neq 0$

ie $W(t_0) \neq 0$

donc (iii)

$S_H = \{t \mapsto \lambda\phi(t) + \mu\psi(t), \lambda,\mu\}$

2.3 Méthode de variation des constantes

Méthode de variation des constantes. On suppose connu un système fondamental (ϕ, ψ) de solutions de (H). Il reste donc à déterminer une solution particulière de (E). Appliquer la méthode de variations des constantes, c'est rechercher une solution particulière de (E) sous la forme :

$$x(t) = \lambda(t)\phi(t) + \mu(t)\psi(t)$$

avec la condition additionnelle :

$$\lambda'(t)\phi(t) + \mu'(t)\psi(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

Remarque.

- $\mathcal{S}_H = \mathrm{Vect}(\phi, \psi) = \{t \mapsto \lambda\phi(t) + \mu\psi(t),\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$. *Ici, on fait varier les constantes » λ et μ.*
- *On peut se souvenir de la condition additionnelle en disant que n'apparaissent pas de dérivées secondes des « constantes » λ et μ.*

Exemple. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}$$

- Sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, c'est une E.D.L.2 à coefficients constants.
- Résolution de (H) : $y'' + 4y' + 4y = 0$

$$r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2$$

donc $S_H = \{t \mapsto \lambda e^{-2t} + \mu t e^{-2t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

- Recherche d'une sol particulière par variation des constantes

On cherche une sol sous la forme :

$$4 \times \quad y(t) = \lambda(t) e^{-2t} + \mu(t) t e^{-2t}$$

$$4 \times \quad y'(t) = -2\lambda(t) e^{-2t} + (e^{-2t} - 2t e^{-2t})\mu(t)$$

$$+ \boxed{\underbrace{\lambda'(t) e^{-2t} + \mu'(t) t e^{-2t}}_{= 0 \text{ par choix}}}$$

$$1 \times y''(t) = 4\lambda(t)e^{-2t} - 4\mu(t)e^{-2t} + 4te^{-2t}\mu(t)$$
$$- 2\lambda'(t)e^{-2t} + (e^{-2t} - 2te^{-2t})\mu'(t)$$

y sol de $(E) \iff \forall t \in \mathbb{R}$

$$e^{-2t}\Big(-2\lambda'(t) + (1-2t)\mu'(t) + \lambda(t)\big(4-8+4\big) + \mu(t)\big(-4+4t+4-8t+4t\big)\Big) = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \boxed{-2\lambda'(t) + (1-2t)\mu'(t) = \frac{1}{1+t^2}} \\ \lambda'(t) + t\,\mu'(t) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \mu'(t) = \frac{1}{1+t^2} \\ \lambda'(t) = -\frac{t}{1+t^2} \end{cases} \qquad L_1 + 2L_2$$

On choisit $\lambda(t) = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$

$\mu(t) = \text{Arctan}\, t$

pour avoir une sol part. de (E) :

$$t \mapsto \left(-\frac{1}{2}\ln(1+t^2) + t\,\text{Arctan}\, t\right)e^{-2t}$$

<u>CCl</u> : $S_E = \left\{ t \mapsto \left(-\frac{1}{2}\ln(1+t^2) + t\,\text{Arctan}\, t + \lambda + \mu t\right)e^{-2t}\ ,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

Classique : $y'' + y = \sim$

S_H

variation des constantes

4.3 Complément : méthode de Lagrange pour les EDL scalaires d'ordre 2

Méthode. Dans le contexte des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 :

S_H plan vecto

$$\alpha(t)y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = \delta(t) \qquad (E)$$

Si l'on connaît y_0 une solution particulière de l'équation homogène (H), on a intérêt à effectuer le changement de fonction inconnue :

$$y(t) = z(t)y_0(t)$$

Explication. On mène les calculs suivants :

$\gamma \times$ $y(t) = z(t)y_0(t)$

$\beta \times$ $y'(t) = z'(t)y_0(t) + z(t)y_0'(t)$

$\alpha \times$ $y''(t) = z''(t)y_0(t) + 2z'(t)y_0'(t) + z(t)y_0''(t)$

Pour traduire que y est solution de (E), on fait une combinaison linéaire de ces trois égalités. Comme y_0 est solution de (H), les termes en $z(t)$ se simplifient toujours. On regroupe les termes en $z''(t)$ et ceux en $z'(t)$:

$$y \text{ solution} \iff \forall t \in I,\ \alpha(t)y_0(t)z''(t) + \big(2\alpha(t)y_0'(t) + \beta y_0(t)\big)z'(t) = \gamma(t)$$

Il s'agit d'une EDL1 en ~~y_0~~ z', pour laquelle on a donc des formules de résolution. □

Exemple. On veut résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation :

$$t^2x'' + tx' + (t^2 - v^2)x = 0$$

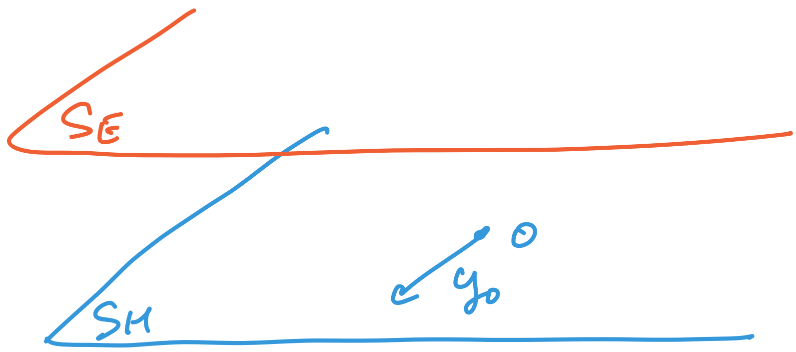
où v est un réel positif.

1. Montrer qu'il existe une unique solution de la forme :

$$J_v = t^v \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \qquad (E)$$

où $a_0 = 1$. Sur quel intervalle cette solution est-elle définie ?

2. Dans le cas où $v = \dfrac{1}{2}$, exprimer toutes les solutions de (E) à l'aide des fonctions usuelles.



2.4 Recherche de solutions développables en séries entières

Méthode. On a vu, lors de l'étude des séries entières, comment rechercher des solutions développables en séries entières d'une équation différentielle linéaire, par exemple d'ordre 1 ou 2.

On note $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, on suppose le rayon de convergence > 0 (c'est l'analyse). Dire que x est solution de l'équation différentielle se traduit (si tout va bien) en une condition sur les a_n (ici, on raisonne par équivalence sous l'hypothèse $R > 0$). On vérifie que les séries obtenues ont bien un rayon de convergence > 0 (c'est la synthèse).

Exemple. Utiliser une série entière pour déterminer l'unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + xy' + y = 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Exemple. On considère l'équation différentielle :

$$t^2x'' - 4tx' + (t^2 - 6)x = 0 \qquad (E)$$

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle qui sont somme d'une série entière autour de 0.
2. Déterminer la dimension de l'espace des fonctions qui sont solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$.