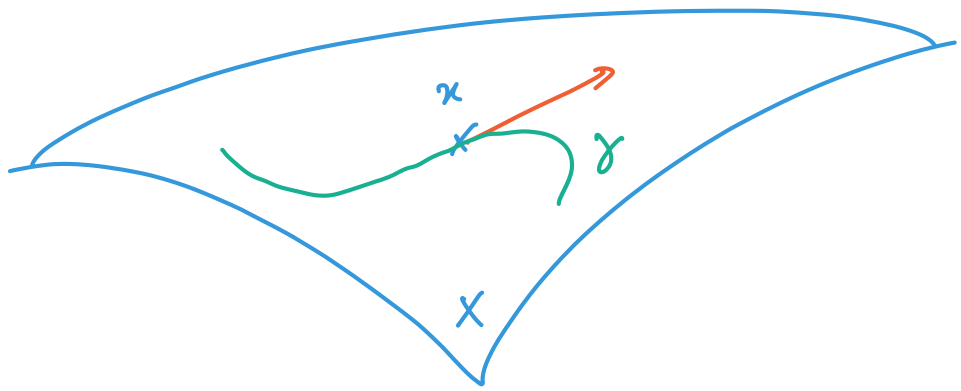
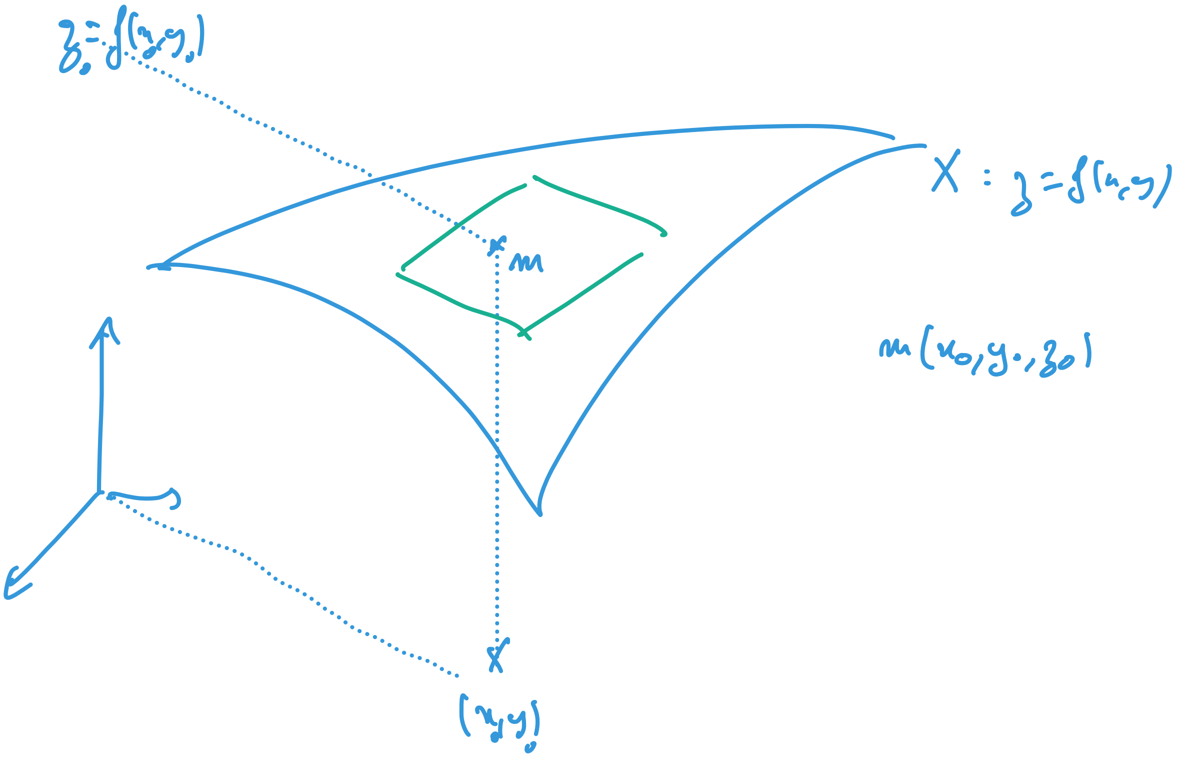
Chap 72

5 Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

Définition. Soit X une partie non vide de E et $x \in X$.
On dit qu'un vecteur $v \in E$ est **tangent à X en x** lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to E$, à valeurs dans X, dérivable en 0, et tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.
On note $T_x X$ l'ensemble des vecteurs tangents à X en x.



Exemple. Pour $E=\mathbb{R}^3$, X graphe d'une fonction numérique $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable définie sur un ouvert U et ~~x~~ $m \in X$, montrer que $T_{\cancel{x}\,m}X$ est un plan vectoriel.



$$X=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tq } (x,y)\in U \text{ et } z=f(x,y)\}.$$

Analyse : Soit $v\in T_mX$ où $m=(x_0,y_0,z_0)\in X$.

il existe $\gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\qquad z_0=f(x_0,y_0)$

$\qquad t \longmapsto \gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$

tq $\begin{cases} \forall t \quad \gamma(t)\in X & z(t)=f(x(t),y(t)) \\ \gamma(0)=m \\ \gamma'(0)=v \end{cases}$

$\forall t \quad z(t)=f(x(t),y(t)) \qquad \Big\downarrow \frac{d}{dt}$

donc $z'(t)=x'(t)\,\partial_1 f(x(t),y(t)) + y'(t)\,\partial_2 f(x(t),y(t))$

en part : $z'(0)=x'(0)\,\partial_1 f(x(0),y(0)) + y'(0)\,\partial_2 f(x(0),y(0))$

donc $(x'(0),y'(0),z'(0)) = (x'(0),y'(0),\ x'(0)\,\partial_1 f(\ldots)+y'(0)\,\partial_2 f(\ldots))$

$\in \mathrm{Vect}\big((1,0,\partial_1 f(x_0,y_0)),\ (0,1,\partial_2 f(x_0,y_0))\big)$

plan vectoriel.

Synthèse.

On note $P = \text{Vect}\left((1,0,\partial_1 f(x_0,y_0)) \, (0,1,\partial_2 f(x_0,y_0)) \right)$

Soit $v \in P$ ie $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq

$$v = \alpha(1,0,\partial_1 f(x_0,y_0)) + \beta(0,1,\partial_2 f(x_0,y_0))$$
$$= (\alpha, \beta, \alpha \partial_1 f + \beta \partial_2 f)$$

Posons $\gamma(t) = (x_0 + \alpha t, \ y_0 + \beta t, \ f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t))$

* $\forall t \ \gamma(t) \in X$
(graphe de la fct f)

* $\gamma(0) = (x_0, y_0, f(x_0,y_0)) = m$

* $\gamma'(t) = (\alpha, \beta, \alpha \partial_1 f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) + \beta \partial_2 f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t))$

donc $\gamma'(0) = (\alpha, \beta, \alpha \partial_1 f(x_0,y_0) + \beta \partial_2 f(x_0,y_0))$

$= v$

Ccl : $T_m X = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1 f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2 f \end{pmatrix} \right)$

équation de X

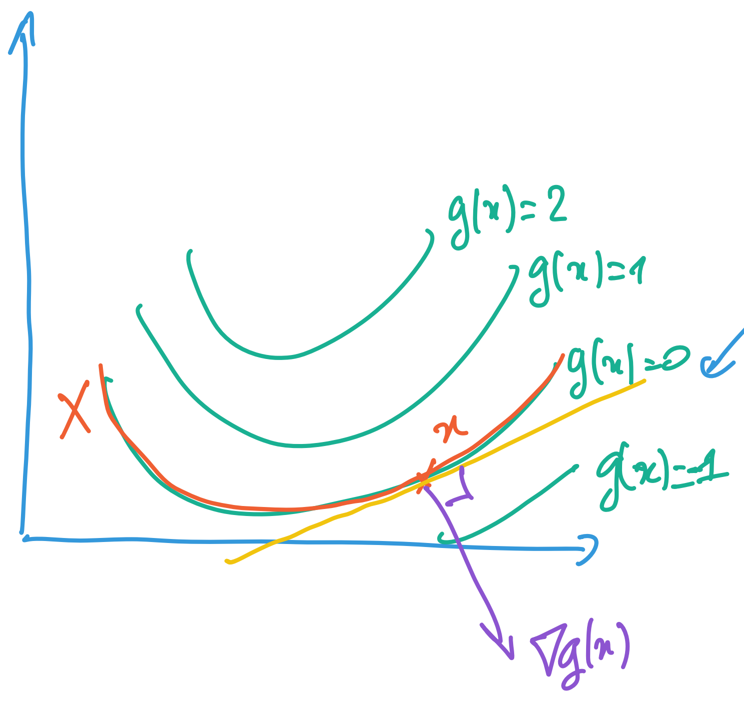
Théorème.

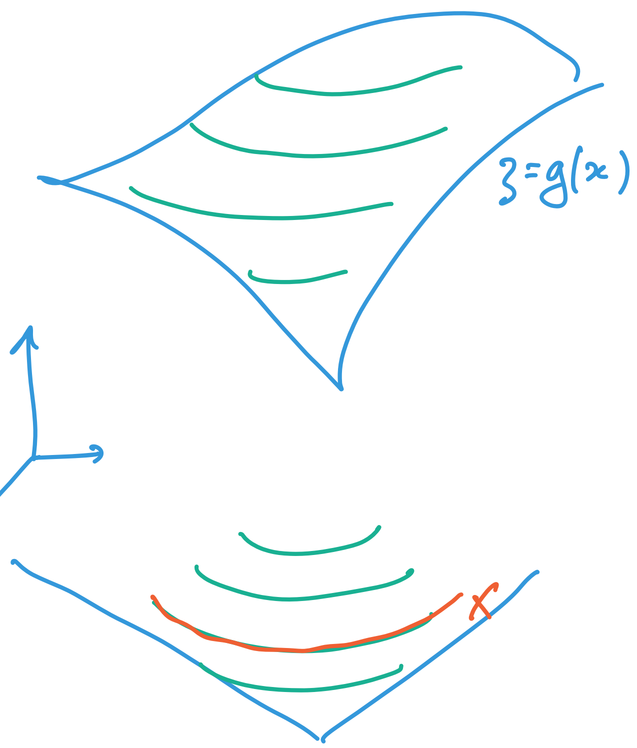
> Soit $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U. On considère l'ensemble :
> $$X = \{x \in U,\ g(x) = 0\}$$
> Si $x \in X$ et $\mathrm{d}g(x) \neq 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$, alors :
> $$T_x X = \operatorname{Ker}\big(\mathrm{d}g(x)\big)$$
> C'est un hyperplan, comme noyau d'une forme linéaire non nulle.

Preuve. Démonstration hors programme. □

Corollaire. Lorsque E est euclidien, la différentielle peut être représentée par le gradient :
Si $x \in X$ et $\nabla g(x) \neq 0_E$, alors :
$$T_x X = \big(\nabla g(x)\big)^{\perp}$$
C'est un hyperplan, et $\nabla g(x)$ en est un vecteur orthogonal.

$$\mathrm{d}g(x).h = \langle \nabla g(x), h \rangle$$





Preuve du théorème : Analogue :

Soit $v \in T_x X$

donc $\exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow E$ tq
$t \longmapsto \gamma(t)$

$$\begin{cases} \forall t \quad \gamma(t) \in X \quad \text{ie} \quad g(\gamma(t)) = 0 \quad \forall t \\ \gamma(0) = x \\ \gamma'(0) = v \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\left\downarrow \begin{array}{ll} \forall t & g(\gamma(t)) = 0 \\ \forall t & dg(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 \end{array}\right.$$

$$\text{en } 0 \quad dg(x) \cdot v = 0$$

$$\text{ie} \quad v \in \operatorname{Ker} dg(x)$$

Corollaire. Lorsque $E = \mathbb{R}^3$ et :

$$X = \{(x, y, z),\ g(x, y, z) = 0\}$$

alors, pour $m \in X$, si $\nabla(g)(m) \neq (0, 0, 0)$, l'ensemble $T_m X$ des vecteurs tangents à X en m est l'hyperplan d'équation :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(m)x + \frac{\partial g}{\partial y}(m)y + \frac{\partial g}{\partial z}(m)z = 0$$

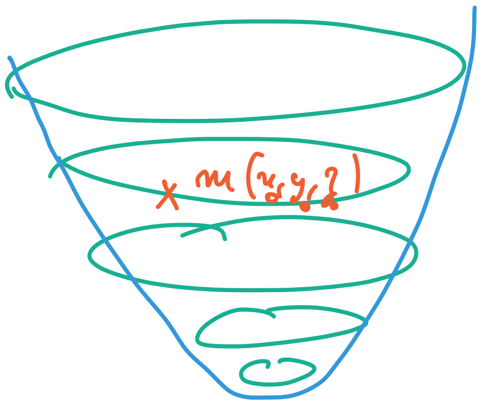
Exemple. Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer l'espace tangent à un point l'ensemble :

$$X = \{(x, y),\ x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer l'espace tangent à un point l'ensemble :

$$X = \{(x, y, z),\ x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0\}$$

$x^2+y^2=z^2-1$



$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longmapsto x^2+y^2-z^2+1$$

$$X = \{ m \mid g(m)=0 \}$$

équation implicite

$$\nabla g(m) = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ -2z_0 \end{pmatrix}$$

$$T_m X = \left(\nabla g(m) \right)^{\perp}$$

$$v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in T_m X \iff \langle v, \nabla g(m) \rangle = 0$$

$$\iff 2x_0 x + 2y_0 y - 2z_0 z = 0$$

éq du plan vectoriel $T_m X$

en $(1,0)$

en $(0,0)$ à

Exemple. Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer l'espace tangent ~~à un point~~ l'ensemble :

$$X = \{(x,y),\ y^2 - 4(1-x^2)x^2 = 0\}$$

On pose $g(x,y) = y^2 - 4(1-x^2)x^2$

Alors X a pour équation $g(x,y) = 0$

$$\partial_1 g(x,y) = -4(-2x)x^2 - 4(1-x^2)2x$$

$$= 16x^3 - 8x$$

$$= 8x(2x^2 - 1)$$

$$\partial_2 g(x,y) = 2y$$

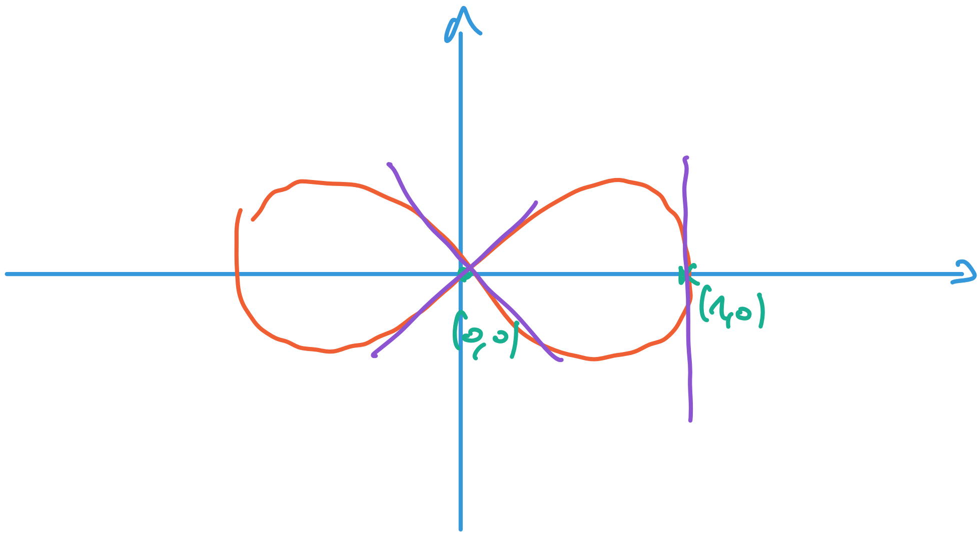
* en $m = (1,0)$ $\quad \nabla g(m) = (8,0) \neq 0$

donc $T_m X = (\nabla g(m))^\perp$

$= \mathrm{Vect}(e_2)$ où $\mathbb{R}^2$ a pour base (e_1, e_2)

* en $m = (0,0)$ $\quad \nabla g(m) = (0,0)$

le th ne s'applique pas.



$m(x,y) \in X \iff y^2 - 4(1-x^2)x^2 = 0$

$\iff y^2 = 4(1-x^2)x^2$

donc $X \subset [-1,1] \times \mathbb{R}$

Posons : $x = \cos t$

$\iff y^2 = 4(1-\cos^2 t)\cos^2 t$

$\iff y^2 = (\sin 2t)^2$

$\iff y = \pm \sin 2t$

Donc $\boxed{X}$ est paramétré par

$$\gamma \boxed{\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}} \cup \cancel{\begin{cases} x = \cos t \\ y = -\sin 2t \end{cases}} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix}$$

$\gamma(0)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

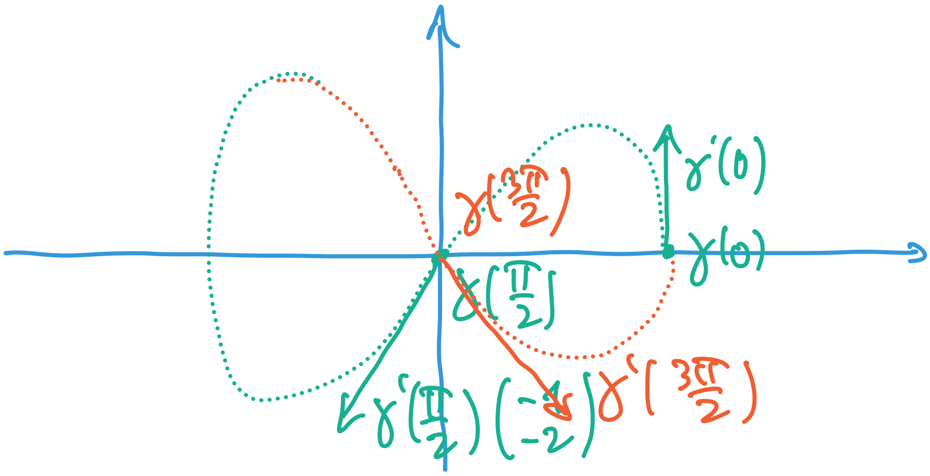
$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ dirige la tangente.

$\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)$ a pour coord $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dirige la tangente en $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ —— $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\gamma'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dirige la tangente



<u>Ccl</u> : $T_{(0,0)}X = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cup \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

<u>Ccl</u> : lorsque $dg(x) = 0$ (ou $\nabla g(x) = 0$)

le thm ne s'applique pas et $T_x X$

peut ne pas être un ev.

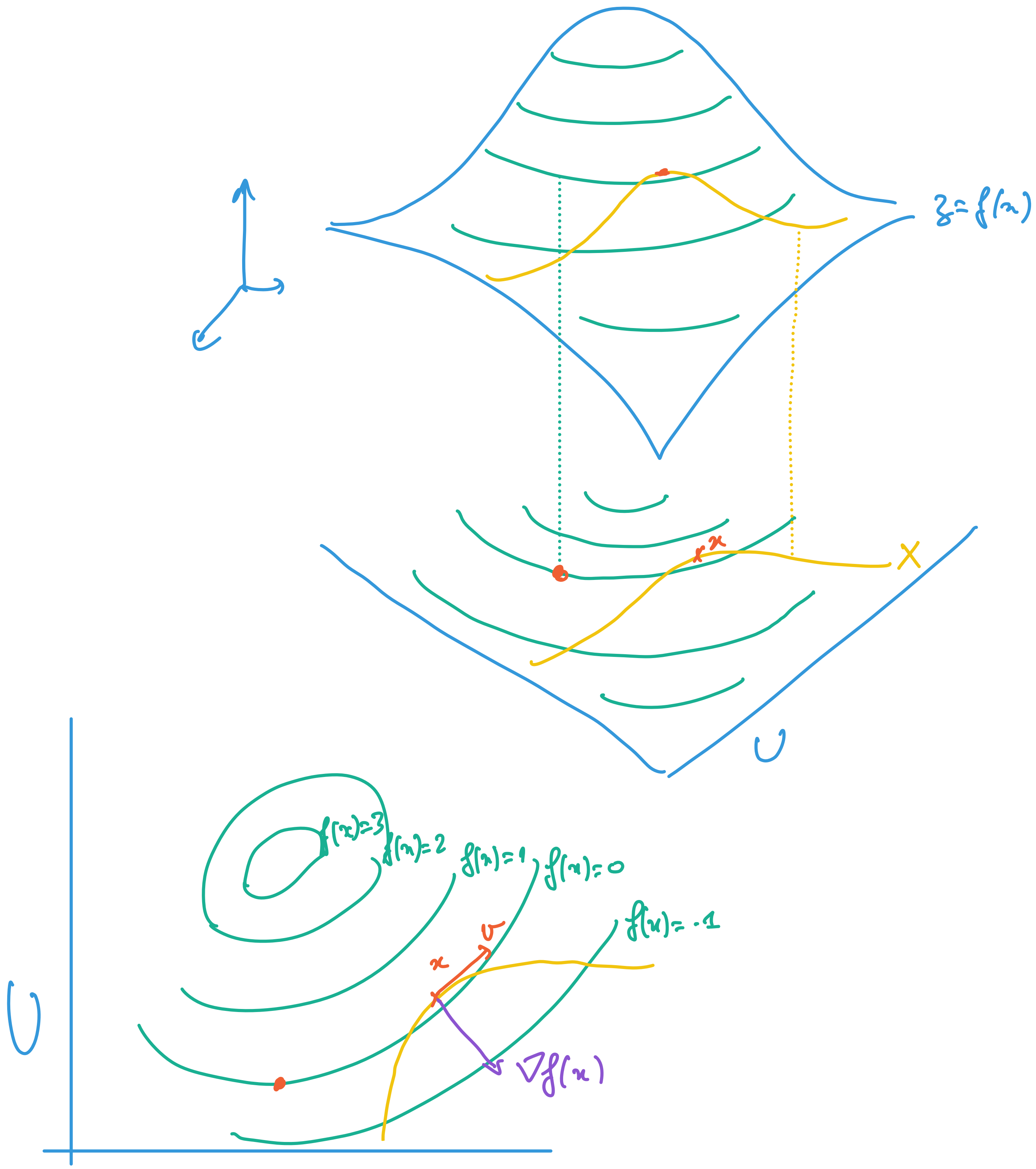
chapitre 73

1.3 Optimisation sous contrainte

Présentation. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U.
Soit $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et :

$$X = \{x \in U,\ g(x) = 0\}$$

L'équation $g(x) = 0$ s'appelle **une contrainte**, et on s'intéresse à la recherche des extremums de $f_{|X}$.



Exemple. Si g est affine, c'est-à-dire de la forme : $x \mapsto c + \ell(x)$ où $c \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, on parle de **contrainte linéaire**.

Lemme. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de différentiable sur U ouvert. Soit X une partie de U et $x \in X$. Si $f_{|X}$ admet un extremum local en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ s'annule sur T_xX :

$$\forall v \text{ tangent à } X,\ \mathrm{d}f(x) \cdot v = 0$$

Preuve:

on suppose x max.

Soit $v \in T_x X$

donc $\exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow E$
$t \longmapsto \gamma(t)$

tq $\begin{cases} \forall t\ \gamma(t) \in X \\ \gamma(0) = x \\ \gamma'(0) = v \end{cases}$

$\forall t,\ f(\gamma(t)) \leq f(x)$
et $f(\gamma(0)) = f(x)$

donc $t \longmapsto f(\gamma(t))$ admet un max

en $t = 0 \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

donc sa dérivée s'annule en 0.

car $(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$

donc: $df(x) \cdot v = 0$

Rmq : Si E euclidien, en termes de gradient:

$$\nabla f(x) \perp v$$

Théorème.

> Soit $f, g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U. On note : $X = \{x \in U,\ g(x) = 0\}$.
> Si :
>
> - $x \in X$
> - $f_{|X}$ admet un extremum en x
> - $\mathrm{d}g(x) \neq 0$
>
> alors :
>
> - $\mathrm{d}f(x)$ et $\mathrm{d}g(x)$ sont colinéaires.

Remarque. *La condition de colinéarité peut encore s'écrire :*

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{d}f(x) = \lambda \mathrm{d}g(x)$$

*Le coefficient λ s'appelle un **multiplicateur de Lagrange** associé à la contrainte $g(x) = 0$.*

Proposition. Dans le cas où E est euclidien, par exemple lorsque $E = \mathbb{R}^n$, la conclusion du théorème s'écrit :

$\nabla f(x)$ et $\nabla g(x)$ sont colinéaires

ou encore, puisque $\nabla g(x) \perp T_x X$:

$$\nabla f(x) \in \left(T_x X\right)^{\perp}$$

Preuve: $T_x X = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}g(x))$ car $\mathrm{d}g(x) \neq 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$

par le lemme :

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}g(x)) \subset \mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}f(x))$$

noyau d'une forme linéaire non nulle
hyperplan.

$\exists v \neq 0$ tq $E = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}g(x)) \oplus \mathrm{Vect}(v)$

Analyse : on cherche λ tq $\lambda\,\mathrm{d}g(x) = \mathrm{d}f(x)$

donc $\lambda\,\mathrm{d}g(x).v = \mathrm{d}f(x).v$

donc $\lambda = \dfrac{\mathrm{d}f(x).v}{\mathrm{d}g(x).v}$

Synthèse :

A priori ! $dg(x).v \neq 0$ car $v \notin \operatorname{Ker} dg(x)$

Posons $\lambda = \dfrac{df(x).v}{dg(x).v}$.

et Mq <u>$df(x) = \lambda\, dg(x)$</u> $(\in \mathcal{L}(E,\mathbb{R}))$

Or $E = \operatorname{Ker} dg(x) \oplus \operatorname{Vect}(v)$

pour $u \in \operatorname{Ker} dg(x) \subset \operatorname{Ker} df(x)$

l'égalité $df(x).u = \lambda dg(x).u$

s'écrit $0 = 0$

pour $u = \alpha v$

$df(x).u = \alpha\, dg(x).v$

$df(x).u = \alpha\, df(x).v$

$= \alpha \lambda dg(x).v$

$= \lambda dg(x).u$

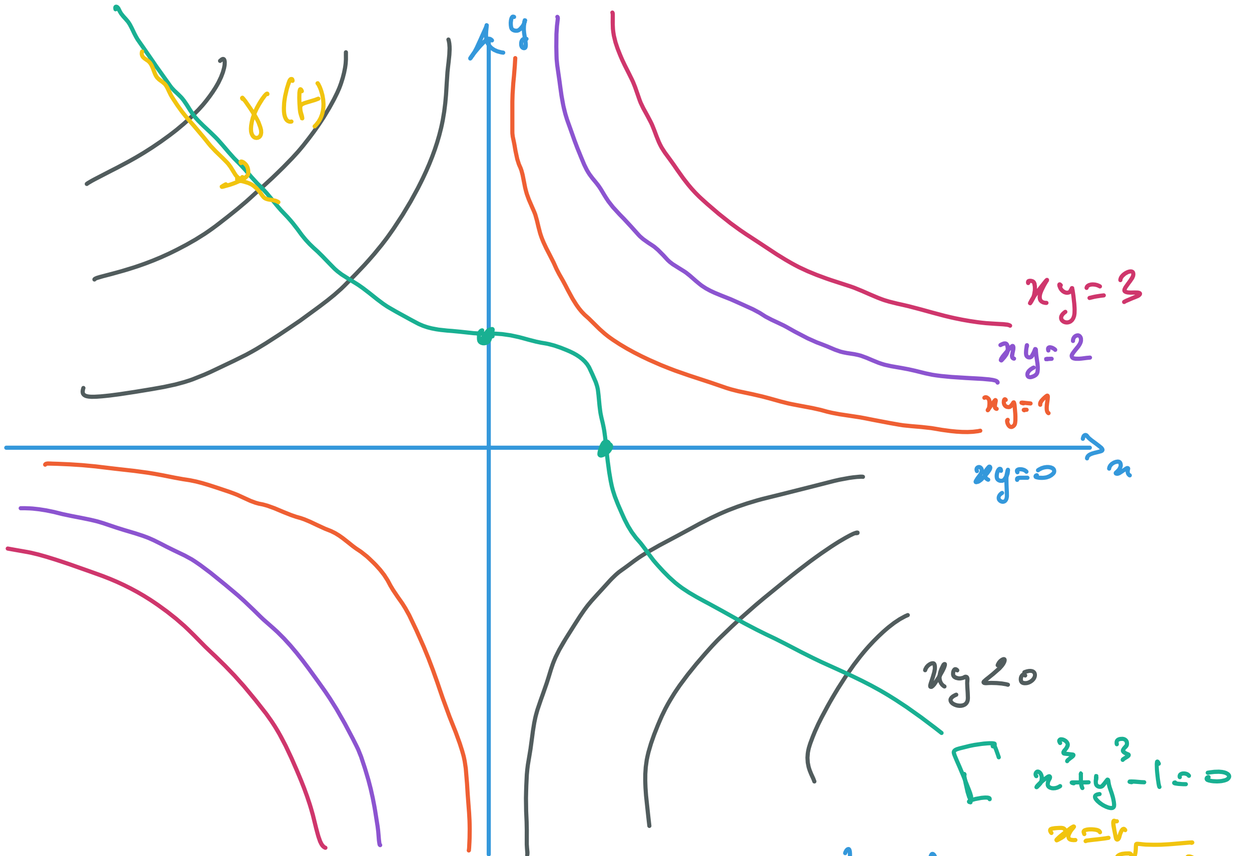
Donc $df(x)$. et $\lambda dg(x)$ coïncident

sur $\operatorname{Ker} dg(x)$ et sur $\operatorname{Vect}(v)$

donc sur E.

73.5

Soit Γ la courbe d'équation $x^3 + y^3 = 1$. Déterminer le maximum de $f\,:\,(x,y) \mapsto xy$ sur Γ.



$g(x,y) = x^3 + y^3 - 1$

- $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ $\qquad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \end{pmatrix}$

$\big(\nabla f(x_0,y_0), \nabla g(x_0,y_0)\big)$ colinéaires

$$\iff \begin{vmatrix} y_0 & 3x_0^2 \\ x_0 & 3y_0^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff y_0^3 - x_0^3 = 0$$

- <u>Si</u> f admet un maximum en (x_0,y_0) sous la contrainte Γ, <u>alors</u> $\begin{cases} y_0^3 - x_0^3 = 0 \\ x_0^3 + y_0^3 = 1 \end{cases}$

Rmq : $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ car $(0,0) \notin \Gamma$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 \\ y_0 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

donc le seul point où f peut admettre un maximum sous la contrainte Γ, c'est en $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

Et $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \dfrac{1}{2^{2/3}}$

- $\forall (x,y)$ tq $x<0$ et $y>0$ ou $x>0$ et $y<0$

  on a $f(x,y) < 0 < \dfrac{1}{2^{2/3}}$

  donc si $f|_\Gamma$ admet un maximum, c'est que $f|_{\Gamma \cap (\mathbb{R}_+^2 \cup \mathbb{R}_-^2)}$ admet un maximum.

- $\Gamma \cap (\mathbb{R}_+^2 \cup \mathbb{R}_-^2) = \{(x,y) \text{ tq } x^3+y^3 = 1 \text{ et } x,y \geq 0 \text{ ou } \cancel{x,y \leq 0}\}$

  $\subset [0,1]^2$

noté $\tilde{\Gamma}$ est borné

fermé car $g^{-1}(\{0\}) \cap \mathbb{R}_+^2$

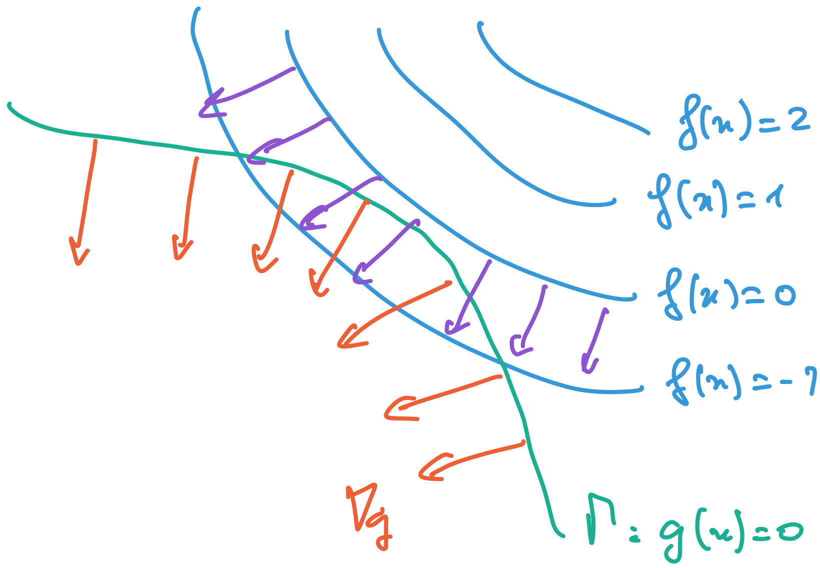
intersection de fermés (g continue)

Donc $\tilde{\Gamma}$ est compact, et f continue,

donc $f|_{\tilde{\Gamma}}$ admet un maximum.

<u>Ccl</u> : $f|_{\Gamma}$ admet un maximum, qui

ne peut qu'être, donc est, $\dfrac{1}{2^{2/3}}$



Une recherche d'extremum sur un ouvert

73.3

Déterminer les extremums locaux de :

$$f\ :\ (x, y) \mapsto x^2 - 2x + 2 + \cos(y)$$

Une recherche d'extremum sur un compact

73.4

On considère $f\ :\ (x, y) \mapsto xy(1 - x - y)$ définie sur :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1\}$$

(a) Justifier que f admet un maximum sur A.

(b) Montrer que ce maximum est atteint en un point intérieur à A.

(c) Déterminer la valeur de ce maximum.