Équations différentielles linéaires

Sauf mention contraire, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé de dimension finie.

1 Généralités

1.1 Équation différentielle linéaire, système différentiel linéaire

Définition.

$x : t \mapsto x(t)$

- On appelle **équation différentielle linéaire** une équation de la forme :
$$x' = a(t) \cdot x + b(t) \tag{E}$$
où $a : I \to \mathcal{L}(E)$ et $b : I \to E$ sont des applications continues.
- Résoudre (E), c'est déterminer les fonctions $x : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :
$$\forall t \in I,\ x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$$
- On appelle **équation différentielle homogène associée à** (E) l'équation :
$$x' = a(t) \cdot x \tag{H}$$

Remarque. *$a(t)$ est une application linéaire, $a(t) \cdot x(t)$ désigne l'image par cette application linéaire du vecteur $x(t)$. On pourrait la noter $a(t)\big(x(t)\big)$.*

Exemple. Rechercher les $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ M'(t) = t^2 M(t)$$
c'est vouloir résoudre une équation différentielle linéaire homogène, où $a : t \mapsto t^2 \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Traduction matricielle.

Fixons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Notons $A(t) = \mathrm{Mat}(a(t), \mathcal{B})$, $B(t) = \mathrm{Mat}(b(t), \mathcal{B})$ et $X(t) = \mathrm{Mat}(x(t), \mathcal{B})$.

éq. diff.

- L'équation différentielle (E) s'écrit sous la forme d'un **système différentiel linéaire** :
$$X' = A(t)X + B(t) \tag{S}$$
où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ sont des applications continues.
- Résoudre (S), c'est déterminer les fonctions $X : I \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :
$$\forall t \in I,\ X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$
- On appelle **système différentiel homogène associé à** (S) :
$$X' = A(t)X$$

Exemple. Rechercher les fonctions $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + (1+t)\,y(t) + t^2 \\ y'(t) = \cos(t)\,x(t) + \sin(t)\,y(t) + 1 + t \end{cases}$$
c'est vouloir résoudre le système différentiel linéaire :
$$X' = A(t)X + B(t) \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
où $A : t \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1+t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}$ et $B : t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ 1+t \end{pmatrix}$.

et A et B sont continues sur l'intervalle $\mathbb{R}$

Exemple : $\begin{cases} (1+t^2)\, x' = tx + y \\ (1+t^2)\, y' = -x + ty \end{cases}$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où $A(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$ A continue sur $\mathbb{R}$ intervalle

c'est un syst. différentiel linéaire homogène

Exemple. Le système de Lotka-Volterra qui modélise l'évolution d'une population de proies et de prédateur s'écrit :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\big(\alpha - \beta y(t)\big) \\ y'(t) = y(t)\big(\delta x(t) - \gamma) \end{cases}$$

C'est un système différentiel, non linéaire. Son étude n'entre pas dans le cadre du programme.

1.2 Principe de superposition

Proposition. Si x_1, x_2 sont solutions de deux équations différentielles linéaires ayant la même équation homogène associée : $x' = a(t) \cdot x + b_1(t)$ et $x' = a(t) \cdot x + b_2(t)$ respectivement, alors $x_1 + x_2$ est solution de l'équation :

$$x' = a(t) \cdot x + \big(b_1(t) + b_2(t)\big)$$

$$\underbrace{x' = a(t)x}_{} + b_1(t) \qquad (E_1)$$

$$\underbrace{x' = a(t)x}_{} + b_2(t) \qquad (E_2)$$

$$x' = a(t)x + \big(b_1(t) + b_2(t)\big) \qquad (E)$$

Avec x_1 sol de (E_1) et x_2 sol de (E_2)

on a $x_1 + x_2$ sol. de (E)

1.3 Problème de Cauchy

Définition. On appelle **problème de Cauchy** l'association d'une équation différentielle linéaire et d'une **condition initiale** :

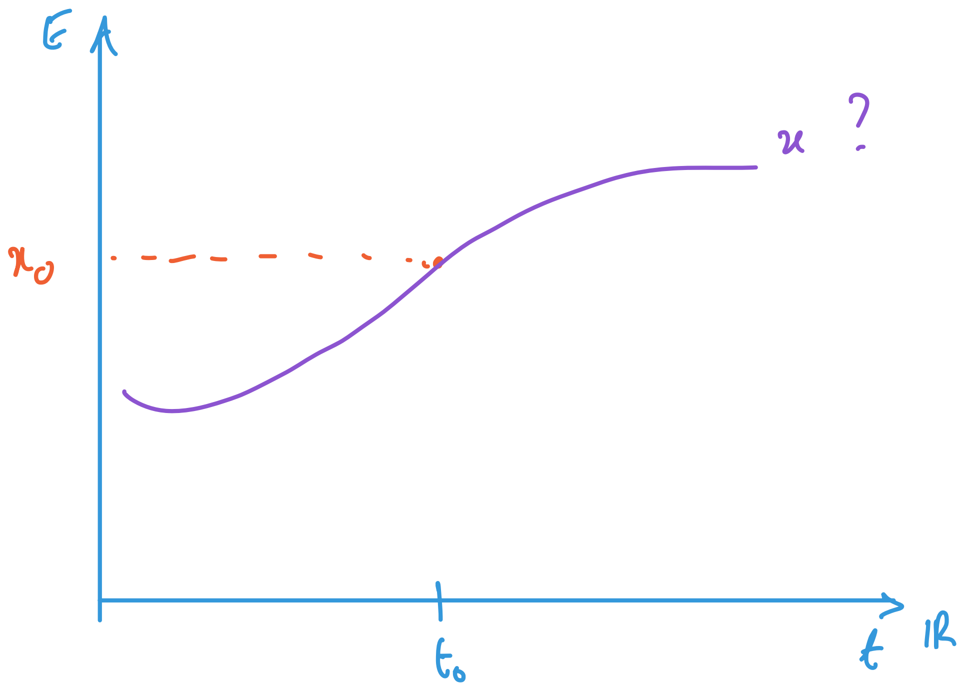
$$\begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$.

Traduction matricielle.
Un **problème de Cauchy** pour un système différentiel linéaire s'écrit :

$$\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

où $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.



Théorème.

La recherche des fonctions $x : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\begin{cases} \forall t \in I,\ x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

est équivalente à la recherche des fonctions $x : I \to E$ continues telles que :

$$\forall t \in I,\ x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(u) \cdot x(u) + b(u)\,\mathrm{d}u$$

Remarque. *On dit qu'on a mis sous forme intégrale le problème de Cauchy.*

Preuve: pour x $\mathcal{C}^1$, $t_0, t \in I$ intervalle

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} x'(u)\,du$$

x à valeurs dans E, X à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

y scalaire signifie : à valeurs dans $\mathbb{K}$

1.4 Représentation d'une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre n

Définition.

Intervalle

- On appelle **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre** n une équation de la forme :

$$1\; y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t) \qquad (E)$$

  où $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{K}$ sont des applications continues.

- Résoudre (E), c'est déterminer les fonctions $f : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^n$ telles que :

$$\forall t \in I,\ f^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)f'(t) + a_0(t)f(t) + b(t)$$

- On appelle **équation différentielle homogène associée à** (E) l'équation :

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y \qquad (E_0)$$

Remarque. *Il importe que l'équation différentielle soit « normalisée », c'est-à-dire que le coefficient devant* $y^{(n)}$ *soit* 1.

Théorème.

Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n peut être représentée par le système différentiel linéaire :

$$X' = A(t)X + B(t)$$

en posant dans $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \qquad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \ldots & a_{n-2}(t) & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Remarque. *On reconnaît la transposée d'une matrice compagnon.*

C'est direct.

Définition. On appelle problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n l'association d'une équation différentielle et d'une condition initiale :

$$\begin{cases} y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

où $t_0 \in I$ et $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1} \in \mathbb{K}$.

Remarque. *Il existe d'autres problèmes, dont l'étude n'est pas au programme, comme celui des conditions aux limites.*

2 Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire

2.1 Théorème de Cauchy linéaire

Théorème de Cauchy linéaire.

Si :

- I est un intervalle
- a et b sont continues sur I

éq est résolue en x' (coeff 1)

alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I.

Remarque. *Ce théorème est un cas particulier d'un théorème plus général, le théorème de Cauchy-Lipschitz.*

Traduction matricielle.

Si :

- I est un intervalle
- A et B sont continues sur I

alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I.

Corollaire.

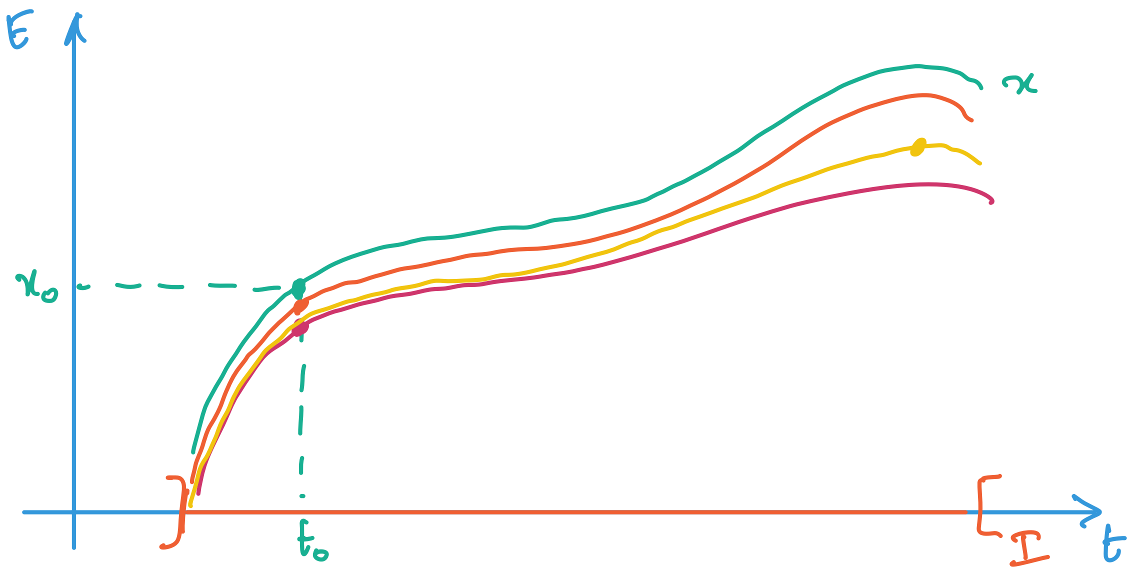
Si :

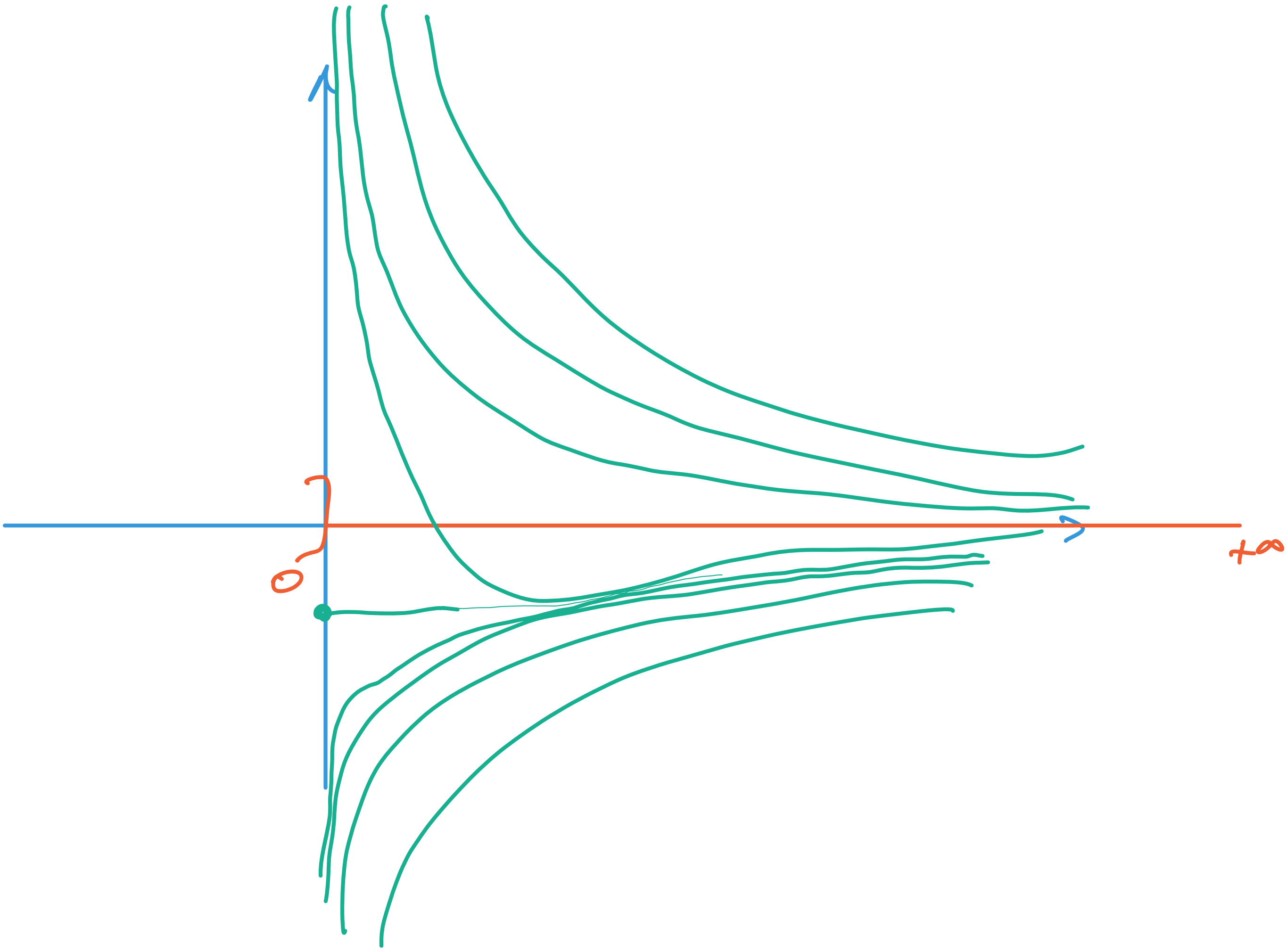
- I est un intervalle
- $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b$ sont continues sur I

alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0, \ y'(t_0) = y_1, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I.



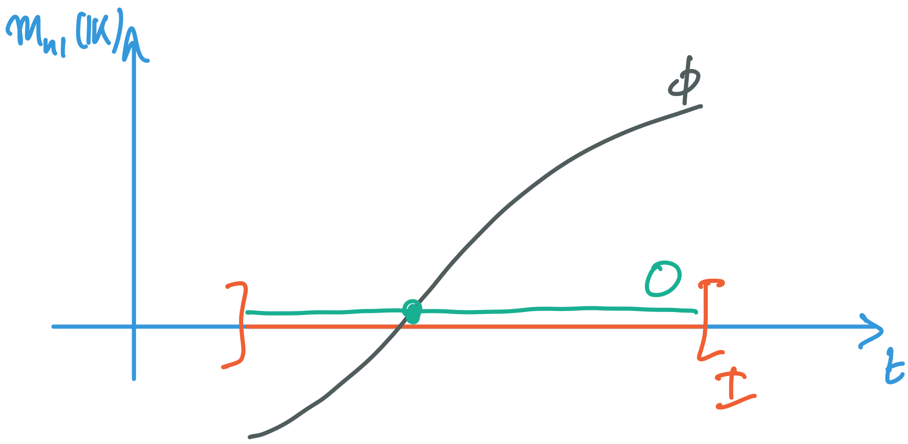


Exemple. Soit $\phi : I \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ une solution de l'équation homogène :

$$X' = A(t)X$$

où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue sur I. Montrer l'équivalence :

$$\exists t \in I,\ \phi(t) = 0 \iff \forall t \in I,\ \phi(t) = 0$$



[⇐] Ah ah!

[⇒] On suppose $\exists t_0$ tq $\phi(t_0) = 0$

Alors ϕ est sol du pb de Cauchy

$$\begin{cases} X' = A(t)X \\ X(t_0) = 0 \end{cases}$$

car $t \mapsto 0_{\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})}$ est aussi solution

I intervalle, A est continue, donc par le

th de Cauchy-linéaires ces 2 solutions

coïncident : $\phi = 0$.

Exemple:

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $AB = BA$ $\qquad$ E_i base canonique de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

$\phi_k(t) = \exp(t(A+B))\, E_k$ $\qquad$ $\phi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

$\psi_k(t) = \exp(tA)\exp(tB)\, E_k$

Mq ϕ_k et ψ_k sont sol d'un même pb de Cauchy.

- $\phi_k(0) = \exp(0)\, E_k = I_n E_k = E_k$

  $\psi_k(0) = E_k$

- $\phi_k'(t) = (A+B)\exp(t(A+B))\, E_k$

  $\qquad = (A+B)\,\phi_k(t)$

  $\psi_k'(t) = \Big(A\exp(tA)\exp(tB) + \exp(tA)B\exp(tB)\Big) E_k$

  $$\text{(1)} \quad \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(tA)^k\right) B = B\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(tA)^k\right) \quad \text{car } AB = BA$$

  $$\Big\downarrow N \to +\infty \qquad\qquad \Big\downarrow N \to +\infty$$

et continuité

Rq $\exp(tA) \in \mathbb{K}[A]$

A, B commutent donc $\exp(tA)$ et B aussi

Ainsi $\psi_k'(t) = (A+B)\exp(tA)\exp(tB)E_k$

$= (A+B)\psi_k(t)$

CCl : ϕ_k et ψ_k sont sol de $\begin{cases} X' = (A+B)X \\ X(0) = E_k \end{cases}$

Par Cth de Cauchy linéaire ($A+B$ cste, $\mathbb{R}$ intervalle)

donc $\phi_k = \psi_k$

Ainsi :

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \underbrace{\exp(t(A+B))}_{\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}} \underbrace{E_k}_{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}} = \underbrace{\exp(tA)\exp(tB)}_{\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}} \underbrace{E_k}_{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}}$

Ainsi $\exp(t(A+B))$ et $\exp(tA)\exp(tB)$

ont la m̂ k-ème colonne.

Vrai $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\exp(t(A+B)) = \exp(tA)\exp(tB)$

(sous réserve $AB = BA$)

2.2 Structure de l'ensemble des solutions — équations homogènes

Théorème.

Si :

- I est un intervalle
- a est continue sur I
- $\mathcal{S}_H$ désigne l'ensemble des solutions l'équation différentielle linéaire homogène : $x' = a(t) \cdot x$

alors :

- $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$
- pour $t_0 \in I$, $\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_H & \to & E \\ x & \mapsto & x(t_0) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels
- $\dim \mathcal{S}_H = \dim E$

Traduction matricielle. Si :

- I est un intervalle
- A est continue sur I
- $\mathcal{S}_H$ désigne l'ensemble des solutions du système différentiel linéaire homogène : $X' = A(t)X$

alors :

- $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}))$
- pour $t_0 \in I$, $\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_H & \to & \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & X(t_0) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels
- $\dim \mathcal{S}_H = n$

Corollaire. Si :

- I est un intervalle
- $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont continues sur I
- $\mathcal{S}_H$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire scalaire homogène :

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y$$

alors :

- $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$
- pour $t_0 \in I$, $\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_H & \to & \mathbb{K}^n \\ y & \mapsto & \big(y(t_0), y'(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels
- $\dim \mathcal{S}_H = n$

<u>Preuve:</u> • $u : \mathcal{C}^1(I, E) \longrightarrow \mathcal{C}^0(I, E)$

$$x \longmapsto \left(t \mapsto x'(t) - a(t).x(t)\right)$$

u linéaire (car la dérivée et a le sont)

et $S_H = \operatorname{Ker} u$

• $S_H \longrightarrow E$

$x \longmapsto x(t_0)$

linéaire (évaluation en t_0)

bijective (Th de Cauchy-linéaire)

• $\dim S_H = \dim E$

<u>Ainsi</u> : $\boxed{S_H \text{ est un ev de dim } n.}$

Remarque. *À part dans le cas où $n = 1$, ou le cas où A est constant, on ne sait en général pas déterminer l'espace vectoriel $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène.*

Définition. Une base de $\mathcal{S}_H$ s'appelle un **système fondamental de solutions** de l'équation homogène.

Exemple. Déterminer une système fondamental de solutions du système :

$$\begin{cases} x'(t) = tx(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + ty(t) \end{cases}$$

On pourra commencer par chercher un système dont sont solutions $u : t \mapsto e^{-t^2/2}x(t)$ et $v : t \mapsto e^{-t^2/2}y(t)$.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

C'est un système diff. linéaire homogène.

~~Chg^t de fonctions inconnues:~~ $u(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} x(t)$

$v(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} y(t)$

$u'(t) = -t \underbrace{\boxed{e^{-\frac{t^2}{2}} x(t)}}_{u} + e^{-\frac{t^2}{2}} x'(t)$

$v'(t) = -t \underbrace{\boxed{e^{-\frac{t^2}{2}} y(t)}}_{v} + e^{-\frac{t^2}{2}} y'(t)$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sol $\iff \begin{cases} x' = tx - y \\ y' = x + ty \end{cases}$

$$\begin{cases} x(t) = e^{t^2/2} u(t) \\ y(t) = e^{t^2/2} v(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t) = t e^{t^2/2} u(t) + e^{t^2/2} u'(t) \\ y'(t) = t e^{t^2/2} v(t) + e^{t^2/2} v'(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ sol } \iff \begin{cases} x' = tx - y \\ y' = x + ty \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u'(t) = -v(t) \\ v'(t) = u(t) \end{cases}$$

$$\iff \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad (E)$$

Oh! $\varphi_k \; t \longmapsto \exp(tB)\, E_k$

$$\varphi_k'(t) = B.\exp(tB)\, E_k = B\,\varphi_k(t)$$

donc on a trouvé 2 solutions de (E) :

$$\varphi_1 : t \longmapsto \exp(tB) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2 : t \longmapsto \exp(tB) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces 2 sol sont indépendantes : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ libre

et $\exp(tB)$ inversible.

<u>Ccl</u> : $S_{(E)} = \left\{ t \longmapsto \exp(tB) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{K} \right\}$

c'est $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$

<u>Retour à</u> x, y :

$$x(t) = e^{t^2/2}\, u(t)$$

$$y(t) = e^{t^2/2}\, v(t)$$

Calcul de $\exp(tB)$

$$tB = t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = -I_2$$

par réc

$$B^{2k} = (-1)^k I_2$$

$$B^{2k+1} = (-1)^k B$$

donc :

$$\exp(tB) \xleftarrow[N\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{2N+1} \frac{1}{k!}(tB)^k = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2N+1} \frac{1}{k!}(tB)^k + \sum_{k \text{ impair}} \frac{1}{k!}(tB)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k)!} t^{2k} B^{2k} + \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+1)!} t^{2k+1} B^{2k+1}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k}\right) I_2 + \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}\right) B$$

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} \cos(t)\, I_2 + \sin(t)\, B$$

donc $\exp(tB) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = R(t)$

et donc : $S_{(E)} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} a\cos t - b\sin t \\ a\sin t + b\cos t \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$

donc l'ensemble recherché est :

$$S = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{t^2/2}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}, t \mapsto e^{t^2/2}\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\right)$$

<u>Exemple</u> : $\begin{cases}(1+t^2)\,x' = t x + y\\ (1+t^2)\,y' = -x + t y\end{cases}$

- $\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}' = A(t)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ où $A(t) = \frac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix}t & 1\\ -1 & t\end{pmatrix}$

  donc c'est un syst. diff. linéaire, homogène sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (A est continue, $\mathbb{R}$ intervalle)

- Donc S_H = ev de dim 2.

- $\begin{cases}(1+t^2)\,x' = t x + y\\ (1+t^2)\,y' = -x + t y\end{cases}$

  <u>Oh!</u> $\begin{cases}x = t,\ y = 1\\ x = -1,\ y = t\end{cases}$ sol...

  Posons : $X_1(t) = \begin{pmatrix}t\\ 1\end{pmatrix}$ $\quad X_2(t) = \begin{pmatrix}-1\\ t\end{pmatrix}$

sont dans S_H.

$$W(t) = \det(X_1(t), X_2(t))$$

wronskien
$$= \begin{vmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix}$$
$$= t^2+1$$
$$\neq 0 \quad \forall t$$

donc (X_1, X_2) est libre

donc $S_H = \mathrm{Vect}(X_1, X_2)$

$$= \left\{ t \longmapsto a\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

2.3 Structure de l'ensemble des solutions — équations complète

Théorème.

Si :

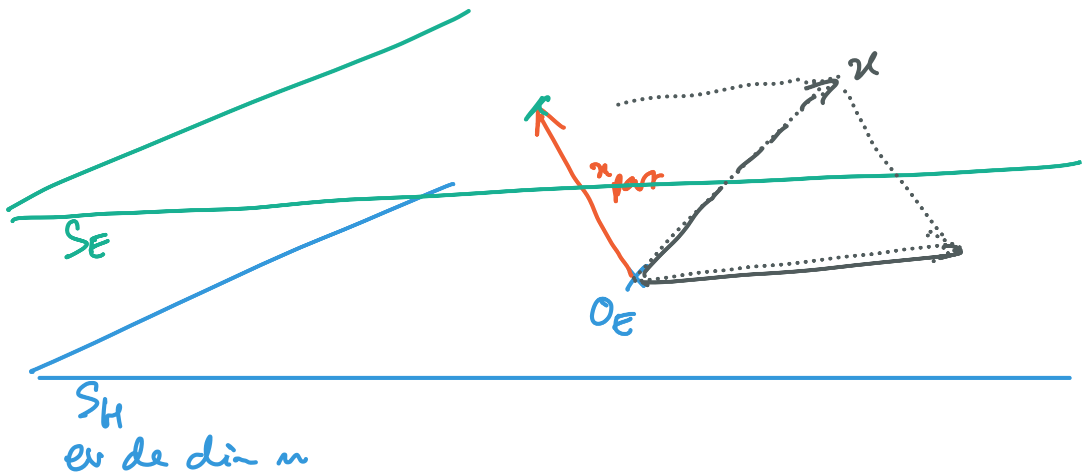
- I est un intervalle
- a et b sont continues sur I
- $\mathcal{S}_E$ désigne l'ensemble des solutions l'équation différentielle linéaire : $x' = a(t) \cdot x + b(t)$

alors :

- $\mathcal{S}_E$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$ de direction $\mathcal{S}_H$:

$$\mathcal{S}_E = x_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

  et qui est de dimension $\dim E$.



Traduction matricielle. Si :

- I est un intervalle
- A et B sont continues sur I
- $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des solutions du système différentiel linéaire : $X' = A(t)X + B(t)$

alors :

- $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}))$ dirigé par $\mathcal{S}_H$:

$$\mathcal{S} = X_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

  et qui est de dimension n.

Corollaire. Si :

- I est un intervalle
- $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b$ sont continues sur I
- $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire scalaire :

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t)$$

alors :

- $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ dirigé par $\mathcal{S}_H$:

$$\mathcal{S} = y_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

  et qui est de dimension n.