Chapitre 32

Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens

Cours

5 Orientation

5.1 Orientation d'un espace vectoriel réel

Fixons E un espace vectoriel réel de dimension finie.

Remarque. *Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, on sait que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est un réel non nul.*
$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ désigne le déterminant de la famille des vecteurs de $\mathcal{B}'$, exprimés en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire le déterminant de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Définition. On dit que $\mathcal{B}$ a la même orientation que $\mathcal{B}'$ lorsque $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$.

$\uparrow$ c'est le dét de Pass $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')$

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'')$$

Proposition. « a la même orientation » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E. Il y a exactement deux classes d'équivalences.

Définition. **Orienter** E, c'est faire le choix de l'une des deux classes d'équivalence pour la relation « a la même orientation ». On fait en général ce choix à travers le choix d'une base particulière, un représentant de la classe choisie. Les bases de cette classe sont dites **directes**, les autres **indirectes**.

Exemple. En général, on oriente $\mathbb{R}^n$ en choisissant la base canonique directe.

Propriété : Si $\mathcal{B}$ base orthonormée directe

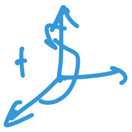
$\mathcal{B}'$ famille de vecteurs

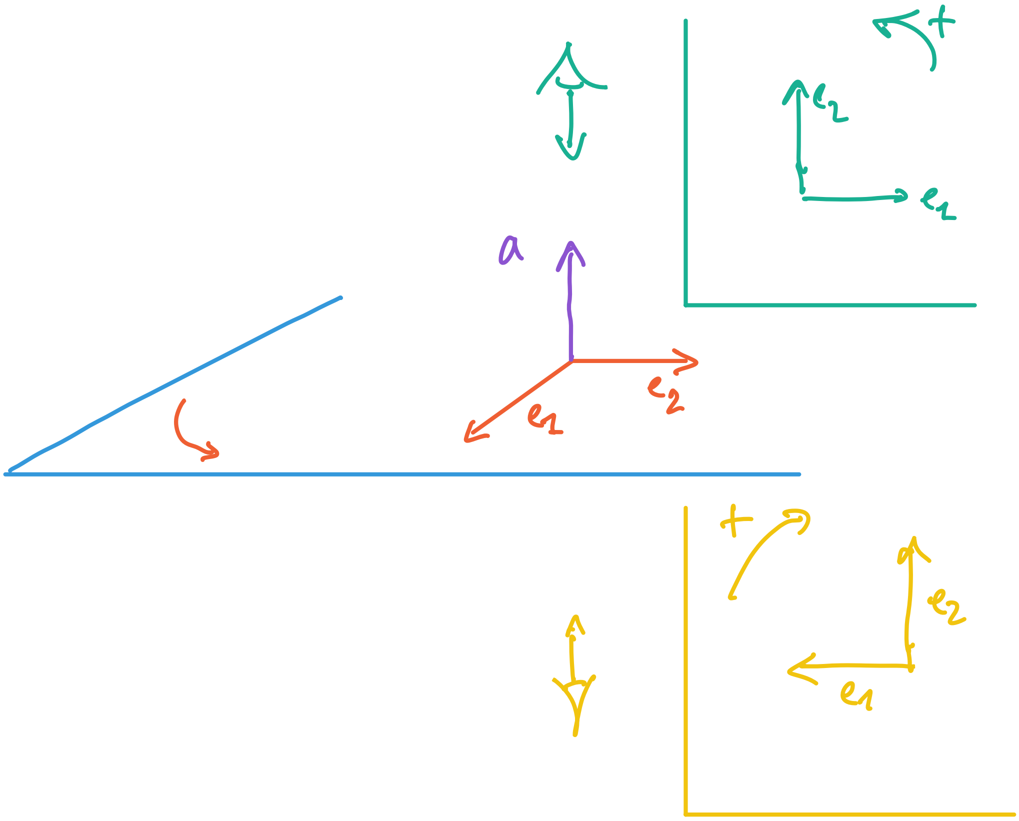
$\mathcal{B}'$ base orthonormée directe

$\Longleftrightarrow$ Pass $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') \in SO_n(\mathbb{R})$

5.2 Orientation d’un hyperplan

Définition. Soit E un espace euclidien orienté, et H un hyperplan de E. On oriente H par le choix d’un vecteur normal a : une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de H est **directe** lorsque $\left(e_1, \ldots, e_{n-1}, \frac{a}{\|a\|}\right)$ est une base directe de E.





$$\det_{\mathcal{B}}(x_1 \dots x_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

5.3 Espace euclidien orienté, produit mixte

Proposition. Soit E un espace euclidien orienté et $x_1, \dots, x_n \in E$.
Le déterminant de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est le même dans toutes les bases orthonormales directes de E.
On peut donc noter :

$$\det(x_1, \dots, x_n)$$

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$$

pour désigner $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$, où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée quelconque de E.

Remarque. *On trouve aussi la notation* $[x_1, \dots, x_n]$, *et l'appelation produit mixte.*

Remarque. *On peut reformuler le résultat précédent en disant que, pour* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *deux bases orthonormées directes de* E *:*

$$\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$$

Proposition. Dans le même contexte, si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$:

$$[u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)] = \det(u) \times [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

6 Étude des isométries vectorielles

6.1 Isométries vectorielles en dimension 2

6.1.1 Étude des isométries vectorielles directes

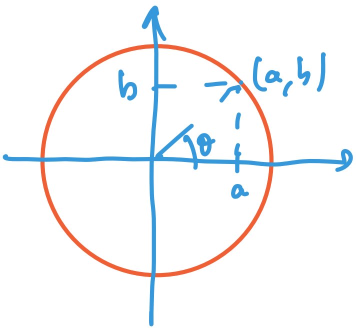
Théorème.

Soit $M \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Preuve: Soit $M \in SO_2(\mathbb{R})$ $\quad M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$\text{où } \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \end{array}\right\} M \in O_2(\mathbb{R}) \\ \left. ad-bc=1 \right) \det(M)=1 \end{array} \right.$$

$a^2+b^2=1$ donc $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tq $\left\{ \begin{array}{l} a=\cos\theta \\ b=\sin\theta \end{array} \right.$



$\exists \varphi \in \mathbb{R}$ tq $\left\{ \begin{array}{l} c=\cos\varphi \\ d=\sin\varphi \end{array} \right.$

et $ac+bd=0$ donc $\cos(\theta-\varphi)=0$

donc $\theta-\varphi = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$

et $ad-bc=1$ donc $\sin(\overset{\varphi-\theta}{\cancel{\theta-\varphi}})=1$

donc $\overset{\varphi-\theta}{\cancel{\theta-\varphi}} = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$

donc $a=\cos\theta$

$b=\sin\theta$

$c=\cos\varphi = \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$

$d=\sin\varphi = \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$

Bref : $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tq

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Corollaire.

- L'application : $\begin{array}{rccl} R : & \mathbb{R} & \to & \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \\ & \theta & \mapsto & R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$ est un morphisme surjectif de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$. Son noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.
- L'application : $\begin{array}{ccl} \mathbb{U} & \to & \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \\ e^{i\theta} & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$ est correctement définie, et est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{U}, \times)$ dans $(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$.

Corollaire. $(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \cancel{\times})$ est un groupe commutatif.

Remarque. *C'est une propriété tout à fait spécifique à la dimension 2.*

Preuve : • Mque $R(\theta + \varphi) = R(\theta) R(\varphi)$

$$R(\theta) R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix}$$

$$= R(\theta+\varphi)$$

$$= R(\varphi+\theta)$$

$$= R(\varphi) R(\theta)$$

• R est surjectif par le th précédent.

• $R(\theta + 2\pi) = R(\theta)$

$\theta \in \mathrm{Ker}\, R \iff R(\theta) = I_2$

$$\iff \begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$\iff \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{U} \arrow[rr, "\text{isomorphie de groupe}"] & & SO_2(\mathbb{R}) \\ & \mathbb{R} \arrow[r, "R"] & SO_2(\mathbb{R}) \\ z \arrow[r, mapsto] & \theta \arrow[r, mapsto] & R(\theta) \end{tikzcd}$$

θ = 1 arg de z

$$R\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$R\left(\frac{\pi}{3}\right) = R\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)$$

$$\mathcal{L}(E) \longleftrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Proposition. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2. Si $u \in \mathrm{SO}(E)$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π, tel que la matrice de u soit, dans n'importe quelle base orthonormée directe de E :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

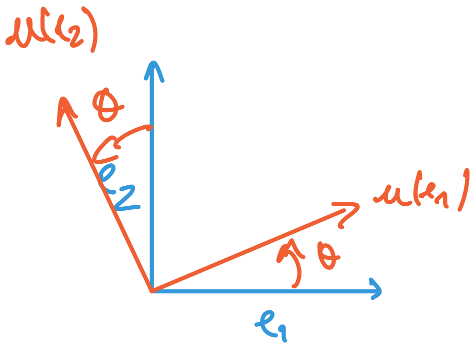
Définition. On dit que u est la **rotation vectorielle d'angle orienté** θ.

C'est quoi u ?

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = R(\theta)$$

$$u(e_1) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$u(e_2) \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$



Soit $\mathcal{B}'$ une autre base orthonormée directe.

$P = \text{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$

$R(\theta) = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$

$M' = \text{Mat}(u, \mathcal{B}')$

Par changement de base $R(\theta) = P M' P^{-1}$

<u>or</u> $P \in SO_2(\mathbb{R})$

donc $\exists \varphi$ tq $P = R(\varphi)$ et $P^{-1} = P^T$
$= R(-\varphi)$

et $M' \in SO_2(\mathbb{R})$ donc $\exists \psi$ tq $M' = R(\psi)$

<u>Bref</u> : $R(\theta) = R(\varphi)\, \underset{\longleftrightarrow}{R(\psi)\, R(-\varphi)}$

$= R(\varphi)\, R(-\varphi)\, R(\psi)$

$= R(\psi)$

$= M'$

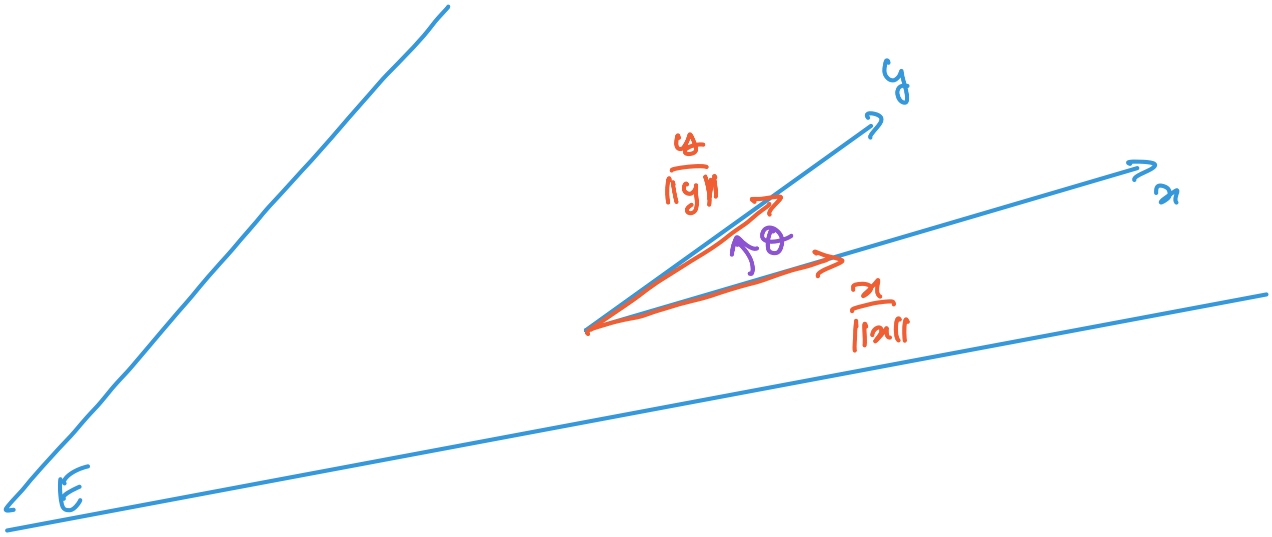
6.1.2 Mesure d'un angle orienté entre deux vecteurs non nuls

Définition. Si x, y sont deux vecteurs unitaires de E un espace euclidien orienté de dimension 2, alors il existe une unique rotation $u \in \mathrm{SO}(E)$ telle que $y = u(x)$.

Si x, y deux vecteurs non nuls, on peut alors appeler **mesure de l'angle orienté** (x, y) tout réel θ tel que la rotation d'angle θ envoie $\frac{x}{\|x\|}$ sur $\frac{y}{\|y\|}$.

On a les relations :

$$\langle x, y\rangle = \|x\| \, \|y\| \cos\theta \qquad \text{et} \qquad [x, y] = \|x\| \, \|y\| \sin\theta$$



6.1.3 Étude des isométries vectorielles indirectes

Proposition. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2. Soit $u \in \mathrm{O}(E) \setminus \mathrm{SO}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E.

- u est une réflexion, c'est-à-dire une symétrie orthogonale par rapport à une droite. un hyperplan
- il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ + \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$
et u est la réflexion par rapport à la droite dirigée par $\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$.

Preuve: Soit $u \in O(E) \setminus SO(E)$

$$M = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} M \in O_2(\mathbb{R}) \\ \det M = -1 \end{cases} \quad [\dots]$$

$$\exists \theta \text{ tq } M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

M symétrique réelle, donc diagonalisable. (orthodiagonalisable)

et $M \in O_2(\mathbb{R})$ donc $Sp(M) \subset \{-1, 1\}$

$(\ \|u(x)\| = \|x\| \quad \forall u \in O(E)\ )$

M n'a pas qu'une seule vp, sinon elle serait semblable (donc égale) à $\pm I_2$ donc dans $SO_2(\mathbb{R})$.

donc M a 2 vp : 1 et -1

$$\exists P \in SO_2(\mathbb{R}) \text{ tq } M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^T$$

En dim 2 :

$SO_2(\mathbb{R})$ * rotations d'angle θ $\quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(donc Id)

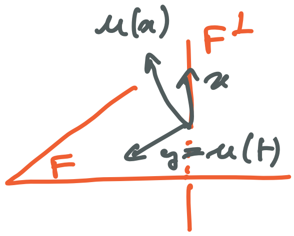
$O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ * réflexions

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^T$$

6.2 Réduction des isométries en dimension n

Lemme. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$

- Si F un sous-espace stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.
- Il y a au moins un plan ou une droite stable par u.
- Les seules valeurs propres (réelles) possibles pour u sont 1 et -1.



Preuve: $u \in O(E)$

- Soit F sous-ev de E stable par u

Mque $F^\perp$ stable par u.

Soit $x \in F^\perp$ et $y \in F$

$$\langle u(x), y \rangle = \langle u(x), u(t) \rangle$$

Or F stable par u

donc l'application induite $u_F : \begin{array}{l} F \longrightarrow F \\ t \longmapsto u(t) \end{array}$

existe. Elle préserve les normes

donc $u_F \in O(F)$ donc bijective

donc $\exists (!)\ t \in F$ tq $y = u_F(t)$
$= u(t)$

Alors: $\langle u(x), y \rangle = \langle u(x), u(t) \rangle$

$= \langle x, t \rangle$ car $u \in O(E)$

$= 0$ car $x \in F^\perp$
$t \in F$

Finalement, $F^\perp$ stable par u.

- On suppose que u n'a pas de droite stable.

  donc u n'a pas de vecteur propre

  On note $v = u + u^*$

  est autoadjoint

  donc $\exists \lambda$ vp. et x vecteur propre associé.

  $$u(x) + u^*(x) = \lambda x$$

  Mq Vect$(x, u(x))$ stable par u.

  $$u^2(x) + \underbrace{u \circ u^*}_{Id_E}(x) = \lambda u(x)$$

  donc $u^2(x) = \lambda u(x) - x \in \mathrm{Vect}(x, u(x))$

  Donc Vect$(x, u(x))$ stable par u

- u isométrie vectorielle.

  Soit λ vp de u, x vecteur propre associé.

  $$\begin{array}{l} \|u(x)\| = \|x\| \\ \| \\ \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \end{array}$$

  avec $x \neq 0$ donc $|\lambda| = 1$.

Théorème.

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathrm{O}(E)$. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, des entiers m, p, q et des réels $\theta_1, \dots, \theta_m$ tels que, par blocs :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{\theta_m} & & \\ & & & -I_p & \\ & & & & I_q \end{pmatrix}$$

Remarque. *Si $u \in \mathrm{SO}(E)$, alors l'entier p est pair.*

Version matricielle. Soit $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et Q de la forme ci-dessus telles que :

$$M = PQP^{-1} = PQP^\top$$

Preuve: par récurrence forte sur n

- Si $\dim E = 1$, $u \in O(E)$

  $\mathcal{B}$ base orthonormée de E $\qquad \mathcal{B} = (e_1)$

  $$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{array}{cc} u(e_1) & \\ \begin{pmatrix} \pm 1 \end{pmatrix} & e_1 \end{array} \in O_1(\mathbb{R})$$

- Si $\dim E = 2$. On l'a vu

  $$R(\theta) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Soit $n \geq 1$. On suppose le résultat vrai dans tout espace de dim $\leq n$.

  Soit E un espace de dim $(n+1)$ et $u \in O(E)$.

  Par le lemme, il existe une droite ou un plan stable par u, noté F.

  F stable par u donc $F^\perp$ aussi (lemme)

On envisage u_F et $u_{F^\perp}$ deux applications induites. Ce sont des isométries vectorielles (car u l'est dans E)

On applique l'HR à u_F et $u_{F^\perp}$

(dim $F = 1$ ou $2 \leq n$

dim $F^\perp = n$ ou $n-1 \leq n$)

d'où $\mathcal{B}_1$ base orn de F

$\mathcal{B}_2$ —— $F^\perp$

tq
$$\mathrm{Mat}(u_F, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & & & \\ & & R_{\theta_m} & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & -1 & \\ (0) & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}(u_{F^\perp}, \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} R_{\varphi_1} & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & R_{\varphi_1} & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{concat de } \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}}{u, \mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & (0) & & \\ & & R_{\theta_m} & & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & & \\ & (0) & & & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & & & & R_{\varphi_1} & & \\ & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & R_{\varphi_1} \\ & & & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

en réordonnant les vecteurs de $\mathcal{B}$,

on obtient la forme annoncée.

isométrie vecto = transformation de l'espace
qui préserve la norme
le produit scalaire

elle s'interprète géométriquement.

(décomposition de E en somme directe
orthogonale de petits espaces stables,
où u induit : rotation
id
$-$id)

6.3 Cas particulier de la dimension 3

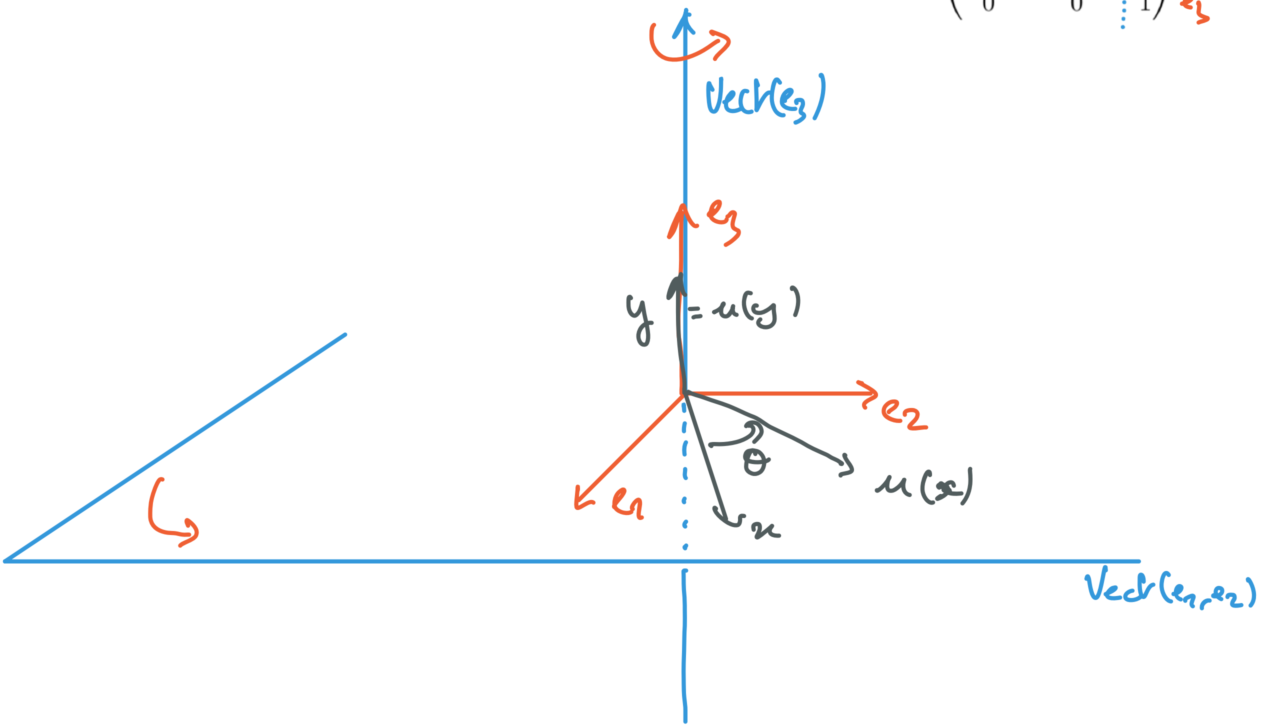
Proposition. Soit E un espace euclidien de dimension 3, $u \in \mathrm{SO}(E)$. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :

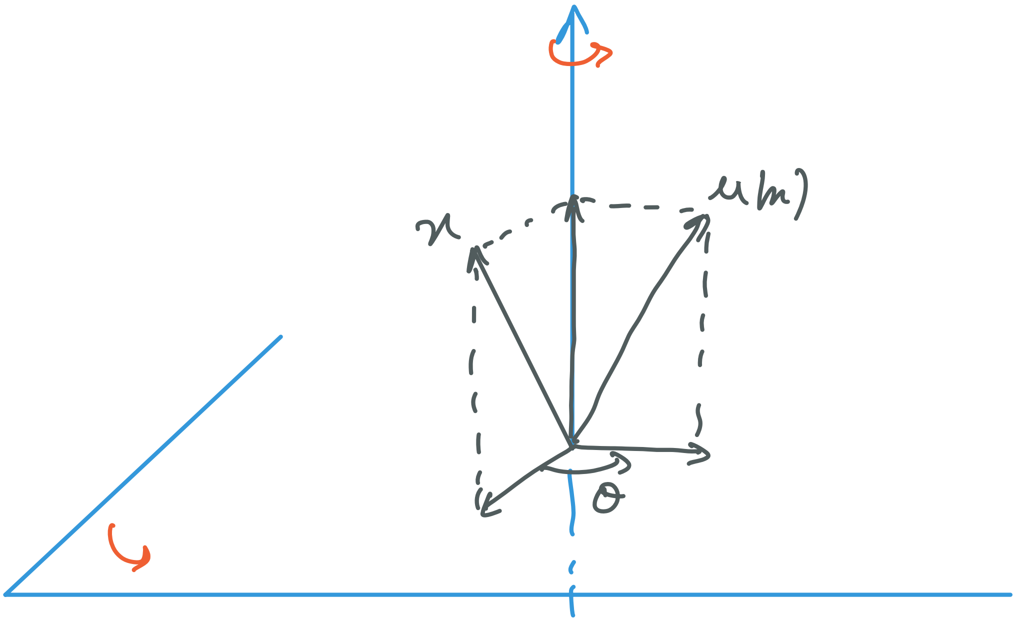
$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{cc:c} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Remarque.

- *Contrairement au cas de la dimension 2, la forme de la matrice de u dépend fortement de la base choisie.*
- *Si l'on écarte le cas où $u = \mathrm{Id}_E$, on constate que $\mathrm{Vect}(e_3)$ est la droite des vecteurs invariants par u. $F = \mathrm{Vect}(e_3)^\perp$, orienté par e_3, est stable par u, et l'endomorphisme induit u_F est une rotation vectorielle d'angle θ.*
  On dit que u est ***la rotation d'axe dirigé et orienté par*** *e_3* ***et d'angle*** *θ.*
- *Le programme officiel indique que « la pratique du calcul des éléments géométriques d'un élément de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ n'est pas un attendu du programme ».*
- *On doit néanmoins savoir trouver l'axe d'une rotation (c'est $E_1(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$), et dire que l'angle vérifie $2\cos\theta + 1 = \mathrm{tr}(u)$, ce qui donne l'angle au signe près.*

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{array}{ccc:cl} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) & & \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 & e_1 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & e_2 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & e_3 \end{array}$$





$\boxed{32.20}$

32.20

Étudier la transformation géométrique associée à :

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}(u, \mathrm{can})$$

Idées: • facteur $\frac{1}{9}$ → normalisation

on soupçonne $M \in O_3(\mathbb{R})$

(u isométrie vectorielle)

• directe ou indirecte ?

$$\det M = \dots > 0$$

truc: $M \in SO_3(\mathbb{R}) \iff M$ matrice de passage entre base ON. directes

$\iff$ colonnes de M base ON directe

or $M \in O_3(\mathbb{R})$ donc colonnes base ON.

donc $C_3 = \pm C_1 \wedge C_2$

$\nearrow$

$+ \longrightarrow SO_3(\mathbb{R})$

$- \longrightarrow O_3(\mathbb{R}) \setminus SO_3(\mathbb{R})$

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{81}\begin{pmatrix} -4\cdot 8 - 1\cdot 4 \\ * \\ * \end{pmatrix} \quad < 0$$

$$= + C_3$$

donc $u \in SO(E)$ $\quad M \in SO_3(\mathbb{R})$

- Donc u est une rotation,

  d'axe dirigé et orienté par e_3 à déterminer

  et d'angle θ à déterminer

- Axe: e_3 engendre $E_1(M)$
- Angle:

$$\underset{\underset{\text{nombre}}{\parallel}}{\operatorname{tr} M} = \operatorname{tr} \underset{\underset{2\cos\theta + 1}{\parallel}}{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$\rightarrow \cos\theta.$

Exercices 32.23 et 32.24 sont corrigés sur le site