Optimisation

Sauf mention contraire, E et F designent des espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

1 Optimisation : étude au premier ordre

1.1 Extremums d'une fonction numérique

Définition. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction numérique, définie sur une partie U de E.

- Pour $a \in U$, on dit que f **atteint un maximum global en** a lorsque :

$$\forall x \in U,\ f(x) \leqslant f(a)$$

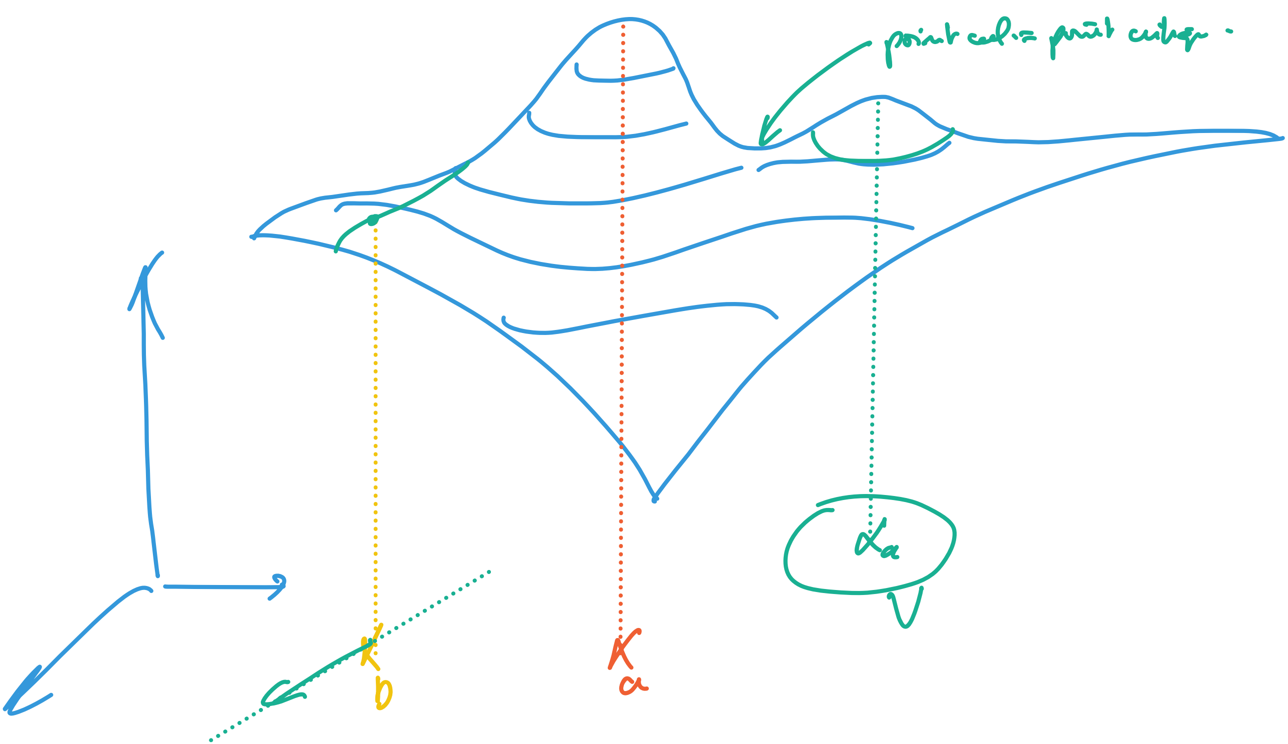
relatif.

- Pour a intérieur à U, on dit que f **atteint un maximum (local) en** a s'il existe un voisinage V de a dans U tel que :

$$\forall x \in V,\ f(x) \leqslant f(a)$$

- On définit de façon analogue **minimum global** et **minimum local**.

Remarque. *Sans autre précision, un extremum est un extremum local.*



Définition. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction numérique, différentiable sur U ouvert, et $a \in U$. On dit que a **est un point critique** lorsque $\mathrm{d}f(a) = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$.

Remarque. *La différentielle de f en a est nulle si et seulement si les dérivées de f en a selon tous les vecteurs sont nulles, si et seulement si toutes les dérivées partielles (selon une base de E) de f en a sont nulles.*

$$df(a).h = \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(a)$$

$$df(a) = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})} \iff \forall i \ \partial_i f(a)$$

$$\overset{\text{eucl}}{\iff} \nabla f(a) = 0$$

1.2 Condition nécessaire du premier ordre

Théorème.

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur U et $a \in U$.
Si :

- f est différentiable sur U
- a est intérieur à U
- f admet un extremum local en a

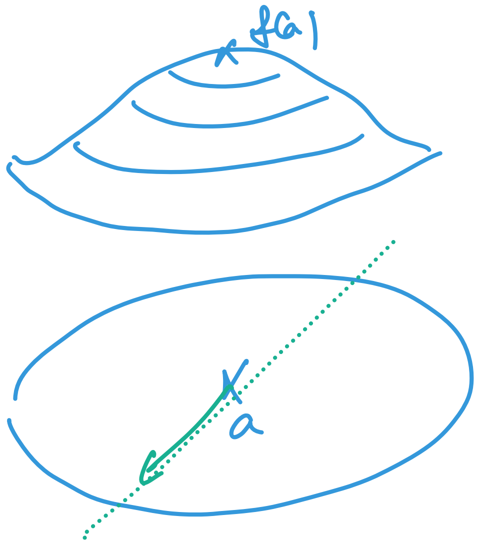
alors :

- a est un point critique de f.

Preuve: $a \in \overset{\circ}{U}$ et f a un ~~extr~~ max local en a

donc $\exists B(a, \eta)$ tq $B(a,\eta) \subset U$

et $\forall x \in B(a, \eta) \quad f(x) \leq f(a)$



Soit $v \in E$ unitaire, qcq

$\forall t \in]-\eta, \eta[\quad a+tv \in B(a,\eta)$

donc $f(a+tv) \leq f(a)$

* donc $\underbrace{\dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t}}_{\substack{\leq 0 \\ \forall t>0}} \xrightarrow[t \overset{>}{\to} 0]{} D_v f(a)$

ainsi $D_v f(a) \leq 0$

* donc $\underbrace{\dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t}}_{\substack{\geq 0 \\ \forall t<0}} \xrightarrow[t \underset{<}{\to} 0]{} D_v f(a)$

donc $D_v f(a) \geq 0$

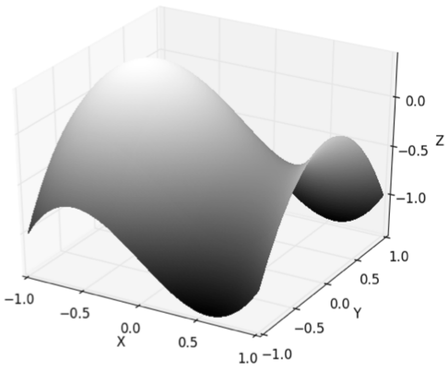
* Bref : $\forall v \quad D_v f(a) = 0$

Ainsi : $df(a).v = D_v f(a) = 0$

Donc $df(a) = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$

Exemple. Déterminer les points critiques de :

$$f : (x, y) \mapsto x^3 - y^2 - x$$



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$$

(x,y) point critique de $f \iff \nabla f(x,y) = 0$

$$\iff \begin{cases} 3x^2 - 1 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc il y a 2 points critiques : $\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)}_{A}$ et $\underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)}_{B}$

Est-ce que A, B extremum ?

$$* \quad f(A + (0,t)) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, t\right)$$

$$= f(A) - t^2$$

$$\leq f(A) \qquad (\text{au voi de } t \to 0)$$

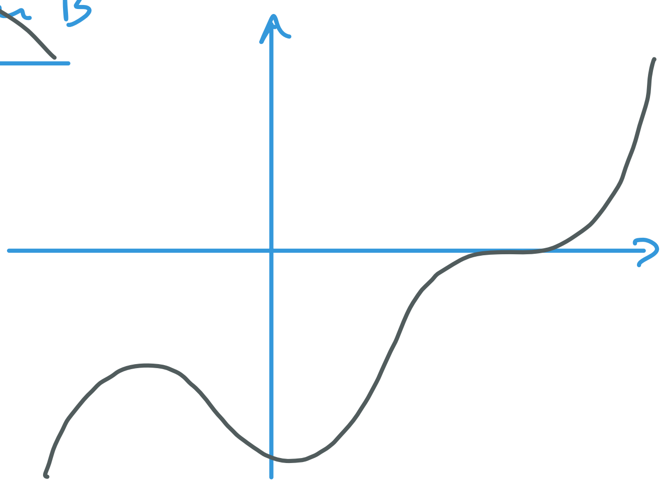
$$f(A+(t,0)) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+t, 0\right)$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}+t\right)^3 - 0^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}+t\right)$$
$$= f(A) + \left(3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 t - t\right) + 3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot t^2 + t^3$$
$$= f(A) + \sqrt{3}\,t^2 + t^3$$

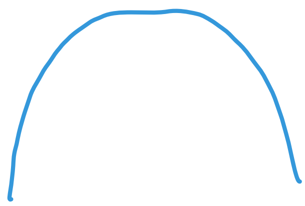
$$f(A+(t,0)) - f(A) = \sqrt{3}\,t^2 + t^3$$
$$\sim \sqrt{3}\,t^2 \qquad \text{au voi de } t \to 0$$
$$\geq 0$$

au voi de A, $f(A+(t,0)) \geq f(A)$

Pas d'extremum en A.

~~Étude en~~ B

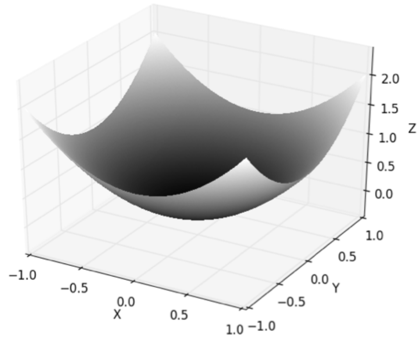




Exemple. Où sont les extremums de :

$$g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$?



Minimum de g :

$$g(0,0) = 0 \leq x^2 + y^2 \quad \forall (x,y)$$

donc g admet un minimum global en $(0,0)$

Y a-t-il d'autres minima ? (locaux)

Si g admet un minimum local en a, c'est en un point critique de g si $a \in \mathring{U}$

$$dg(x,y)(h,k) = 2xh + 2yk$$

$$dg(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

On devrait ensuite faire l'étude aux bords.

Rmq : $[-1,1] \times [-1,1]$ compact et g continue donc g admet un maximum global

(et aussi un minimum global)

On remarque $g(1,1) = 2$

$\geq x^2+y^2 \ \forall x,y$

Le max de g est 2

atteint en $(1,1)$

(et aussi en $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$)

⚠ Max global de g en $(1,1)$

et $\partial_1 g(1,1) = 2 \neq 0$

$\partial_2 g(1,1) = 2 \neq 0$

$(1,1)$ n'est pas un point critique

$\left((1,1) \notin \overset{\circ}{\overbrace{[-1,1]\times[-1,1]}} \right)$

2 Applications de classe $\mathcal{C}^k$

2.1 Dérivées partielles d'ordre $k \geqslant 2$

Définition. Soit $f : E \to F$ une fonction définie sur un ouvert U. On considère $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

- Lorsqu'elles existent, les $\partial_i f = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ sont les **dérivées partielles premières** de f.
- Lorsqu'elles existent, on définit les **dérivées partielles secondes** comme dérivées partielles des dérivées partielles premières :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}(a) = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(a)$$

  que l'on note encore $\partial_j \partial_i f(a)$ ou encore $\partial_{ij} f(a)$.
- On dit que f **est de classe** $\mathcal{C}^2$ sur U lorsque toutes ses dérivées partielles secondes existent et sont continues sur U.
- On définit par récurrence les **dérivées partielles d'ordre** k, et la **classe** $\mathcal{C}^k$.
- f **est de classe** $\mathcal{C}^\infty$ lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k.

2.2 Théorème de Schwarz

Théorème de Schwarz.

Soit $f : E \to F$ une fonction définie sur un ouvert U. On considère $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, alors pour tout i, j :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Remarque. *Plus généralement, si f est de classe $\mathcal{C}^k$, les dérivées partielles k-ièmes ne dépendent pas de l'ordre des dérivations.*

Exemple. On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Qu'en déduire ?

• Calcul des dérivées partielles premières :

(Ce sont les dérivées des applications partielles)

* en $(0,0)$:

$f(x,0) = 0$ donc $\partial_1 f(0,0) = 0$

* en $(x,y) \neq (0,0)$

$$f(x,y) = xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}$$

$$\text{donc } \partial_1 f(x,y) = \frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

• Calcul des dérivées secondes ?

$\partial_2 \partial_1 f(0,0)$

la dérivée de la 2e application partielle de

$\partial_1 f$ en $(0,0)$

$$\partial_1 f(0,y) = -y$$

donc $\partial_2 \partial_1 f(0,0) = -1$

<u>Calcul de $\partial_2 f(x,y)$:</u>

* en $(0,0)$

$$f(0,y) = 0$$

donc $\partial_2 f(0,0) = 0$

* en $(x,y) \neq (0,0)$

$$f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{(x^2+y^2)}$$

donc $$\partial_2 f(x,y) = \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^5 - 4x^3y^2 + 2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

<u>On calcule $\partial_1 \partial_2 f(0,0)$</u>

c'est la dérivée de l'application partielle de $\partial_2 f$

$$\partial_2 f(x,0) = x$$

on dérive (par rapport à x) et on évalue en 0 :

$$\partial_1 \partial_2 f(0,0) = 1$$

Donc $\partial_1 \partial_2 f(0,0) \neq \partial_2 \partial_1 f(0,0)$

donc f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$.

2.3 Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$

Proposition. Une combinaison linéaire d'applications $\mathcal{C}^k$ est $\mathcal{C}^k$; une composée d'applications de classe $\mathcal{C}^k$ est $\mathcal{C}^k$; une composée d'application $\mathcal{C}^k$ sur U avec un arc $\mathcal{C}^k$ à valeurs dans U est $\mathcal{C}^k$.

Proposition. L'ensemble $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

2.4 Exemples d'équations aux dérivées partielles

Remarque. *Aucun résutlat spécifique n'est à connaître. Fréquemment, on applique un changement de variable (et donc un changement de fonction inconnue) pour se ramener à une équation plus simple, ne faisant intervenir que les dérivées partielles par rapport à une seule variable, comme par exemple :*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Les fonctions solutions de cette équation sont, sur un ouvert convexe, les fonctions « constantes en x_1 », c'est-à-dire telles qu'il existe φ :

$$\forall x, y,\ f(x, y) = \varphi(y)$$

Exemple. Effectuer le changement de variable $\begin{cases} u = x \\ v = y - x \end{cases}$ pour résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Un changement de variable, c'est un changement de fonction inconnue.

On pose $f(x,y) = g(u,v)$

$$= g(x, y-x)$$

$\frac{\partial f}{\partial x} \; f = f \; \frac{\partial g}{\partial u}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \underbrace{1}_{\frac{du}{dx}} \frac{\partial g}{\partial u}(x, y-x) + \underbrace{(-1)}_{\frac{dv}{dx}} \frac{\partial g}{\partial v}(x, y-x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\,\frac{\partial g}{\partial u} + 1\,\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$f \text{ sol} \iff \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

$$\iff \forall x,y \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$$

$$\iff \forall \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\Uparrow}{x,y}} \quad \frac{\partial g}{\partial u}(x, y-x) = g(x, y-x)$$

$$\iff \forall \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\Uparrow}{u,v}} \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = g(u,v)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial u} = g$$

$\downarrow$ à v constant

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \text{ tq } g(u,v) = \lambda(v)e^{u}$$

λ est une fonction d'1 variable

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \text{ tq}$$

$$\boxed{f(x,y) = \lambda(y-x)e^{x}}$$

Exemple. Résoudre sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x}f$$

en passant en coordonnées polaires.

On pose $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$f(x,y) = g(u,v)$
$= g(x, y-x)$
$\frac{\partial}{\partial x}$ $\frac{\partial}{\partial y}$

$$f(x,y) = g(r,\theta)$$

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f \text{ sol} \Leftrightarrow x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x} f$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot g = 0$$

à r constant

$\Leftrightarrow \exists \lambda$ (fct) tq

$$g(r,\theta) = \lambda(r)\, e^{-\ln|\cos\theta|}$$

$\Leftrightarrow \exists \lambda$ fct

$$g(r,\theta) = \frac{\lambda(r)}{\cos\theta}$$

$$f(x,y) = \frac{\lambda(x^2+y^2)}{\cos(\theta)}$$

Pour demain : eq de d'Alembert

+ 7.3.2

Exemple. Pour $c \in \mathbb{R}$, poser $\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases}$ pour résoudre l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$