$f : U \subset E \longrightarrow F$

$\underbrace{\|h\|\,\varepsilon(h)}_{} \to 0$

$a \in U$ $\qquad f(a+h) = f(a) + \underbrace{df(a).h} + o(h)$

$df(a) \in \mathcal{L}(E,F)$

$(df(a))(h)$

$$\begin{array}{rccc} df(a) : & E & \xrightarrow{\text{linéaire}} & F \\ & h & \longmapsto & df(a).h \end{array}$$

2.3 Différentielle d'une application sur un ouvert

Définition. Soit $f : E \to F$ une fonction définie sur un ouvert U. On dit que f **est différentiable sur** U lorsqu'elle est différentiable en tout point $a \in U$. On appelle **différentielle de** f **sur** U l'application :

$$df : \begin{array}{rcl} \mathrm{d}f \; U & \to & \mathcal{L}(E,F) \\ a & \mapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array}$$

$df = \frac{df}{dx}dx \qquad \frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$

Remarque. *Les physiciens écrivent :*

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$$

$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

et ils ont bien raison.
En effet, en notant $x_i : x \mapsto x_i$ l'application qui, à un vecteur x de E, associe sa coordonnée x_i dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, on définit une application linéaire. On a donc :

$$\forall a \in U,\ \mathrm{d}x_i(a) = x_i$$

et donc, pour tout $h \in E$:

$$\mathrm{d}x_i(a) \cdot h = x_i(h) = h_i$$

Finalement, pour tout $a \in U$, on a les égalités dans F :

$$\begin{aligned} \forall h \in E,\ \mathrm{d}f(a) \cdot h &= \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \mathrm{d}x_i(a) \cdot h \end{aligned}$$

donc, dans $\mathcal{L}(E,F)$:

$$\forall a \in U,\ \mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \mathrm{d}x_i(a)$$

ce qui peut encore s'écrire, dans $\big(\mathcal{L}(E,F)\big)^U$:

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$$

2.4 Cas où $E = \mathbb{R}$: fonctions d'une variable réelle

Proposition. Soit $f : \mathbb{R} \to F$ une fonction d'une variable réelle, définie sur un intervalle ouvert U, et $a \in U$.
f est différentiable en a si set seulement si f est dérivable en a. Dans ce cas :

$$f'(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot 1$$

Remarque. *Ainsi, l'application linéaire tangente de f en a est l'application :*

$$h \mapsto f'(a)h$$

$a \in U$ $\quad df(a) : E \xrightarrow{\text{linéaire}} \mathbb{R}$ $\quad df(a) = \langle \vec{v}, \cdot \rangle$

forme linéaire

2.5 Cas où E est euclidien

Définition. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur un ouvert U, et $a \in U$. On suppose que E est un espace euclidien, et que f est différentiable en a.
Alors il existe un unique vecteur, appelé **gradient de f en** a, et noté $\nabla f(a)$, tel que :

$$\forall h \in E,\ \mathrm{d}f(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

$\operatorname{grad} f(a)$ $\quad \overrightarrow{\operatorname{grad}} f(a)$ $\quad \vec{\nabla} f(a)$

Remarque. *Ainsi, lorsque f est différentiable en a :*

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \underset{h \to 0}{o}(h)$$

$\operatorname{grad} f : a \longmapsto \operatorname{grad} f(a)$

Proposition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Alors :

$$\nabla f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\, e_k$$

En particulier, lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique :

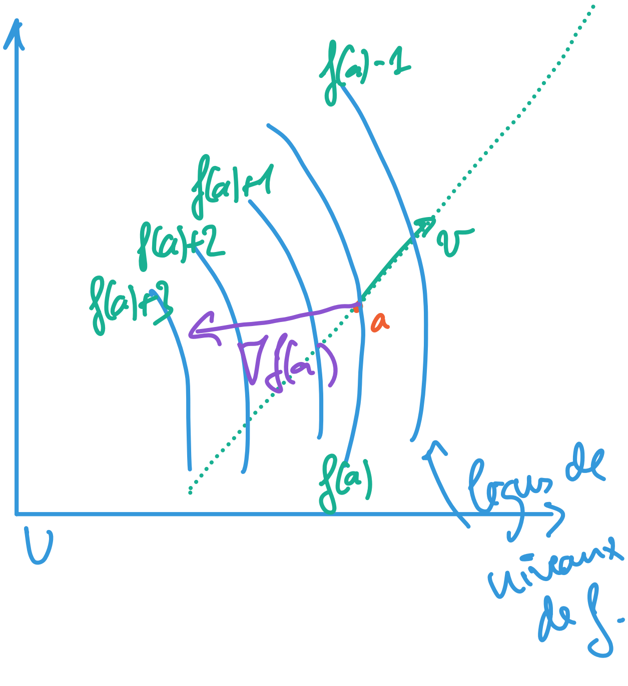
$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

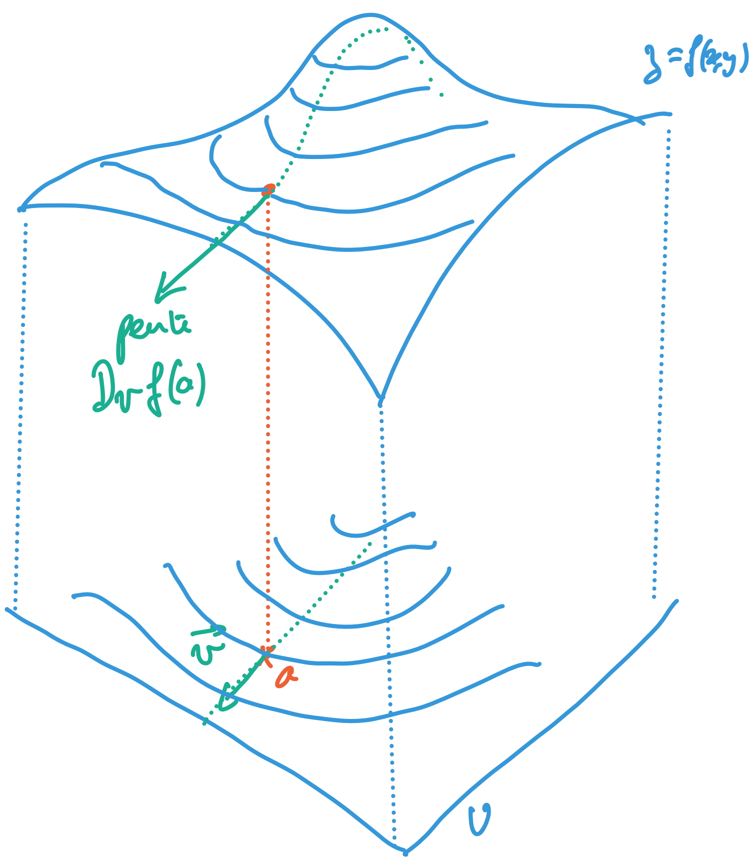
Interprétation géométrique. Si $\nabla f(a) \neq 0$, alors $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

Remarque. *Bref, $\nabla f(a)$ indique la direction de plus grande variation de f : le vecteur unitaire v pour lequel $\mathrm{D}_v f(a)$ est maximale est :*

$$v = \frac{1}{\|\nabla f(a)\|} \nabla f(a)$$

preuve :





$$D_v f(a) = df(a) \cdot v$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot v_y$$

$$= \langle \nabla f(a), v \rangle$$

Cauchy-Schwarz :

$$|\langle \nabla f(a), v \rangle| \leq \| \nabla f(a) \| \, \|v\|$$

avec v unitaire

$$-\|\nabla f(a)\| \leq \langle \nabla f(a), v \rangle \leq \|\nabla f(a)\|$$

cas d'égalité lorsque $\nabla f(a)$ et v colinéaires de même sens

Donc $\nabla f(a)$ colinéaire au vecteur v où

$\langle \nabla(f)(a), v \rangle$ maximal

$f(a+v) - f(a)$ maximal

$\hookrightarrow \langle \nabla f(a), v \rangle + o(v)$

$$\begin{array}{rccl} df : & U & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,F) \\ & a & \longmapsto & df(a) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} df(a) : & E & \xrightarrow{\text{lin}} & F \\ & h & \longmapsto & df(a).h \end{array}$$

3 Applications de classe $\mathcal{C}^1$

Définition. Soit $f : E \to F$ une fonction définie sur un ouvert U. On dit que f **est de classe $\mathcal{C}^1$ sur** U lorsqu'elle est différentiable en tout point de U, et que :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{d}f : & U & \to & \mathcal{L}(E,F) \\ & a & \mapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array}$$

est continue sur U.

Remarque. *Comme $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes.*

Théorème.

Soit $f : E \to F$ une fonction définie sur un ouvert U, et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si les dérivées partielles de f dans la base $\mathcal{B}$ existent et sont continues sur U.
Dans ce cas :

$$\mathrm{d}f(a) \cdot h = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Remarque. *Ce résultat est indépendant du choix de la base.*

Preuve :

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose df existe et est continue.

$\forall v \in E, \quad D_v f(a) = df(a).v$

$\qquad = \theta_v\big(df(a)\big)$

où $\begin{array}{rccl} \theta_v : & \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & F \\ & u & \longmapsto & u(v) \end{array}$ évaluation en v

θ_v est linéaire sur $\mathcal{L}(E,F)$ de dim finie

donc θ_v continue. Composée avec df

supposée continue, on a

$$\forall v, \quad a \longmapsto D_v f(a) \text{ continue.}$$

En part pour $v = e_i$ dans $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ base de E

Donc $\quad a \longmapsto \partial_i f(a)$ continue.

$\boxed{\Leftarrow}$ Cas où $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base canonique de $\mathbb{R}^2$.

On suppose $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont continues sur U.

Mques $f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(h)$

ie $f(a_1+h_1, a_2+h_2) = f(a_1, a_2)$

$$+ h_1 \partial_1 f(a_1,a_2) + h_2 \partial_2 f(a_1,a_2)$$

$$+ o(h_1, h_2)$$

$f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1,a_2)$

$$= \underbrace{f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2)}_{\delta_1(h)}$$

$$+ \underbrace{f(a_1+h_1, a_2) - f(a_1,a_2)}_{\delta_2(h)}$$

avec : $\quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$

$$\delta_1(h) = \int_{a_2}^{a_2+h_2} \partial_2 f(a_1+h_1, t)\, dt$$

$$= h_2 \partial_2 f(a_1+h_1, a_2) + \underbrace{\int_{a_2}^{a_2+h_2} \partial_2 f(a_1+h_1, t) - \partial_2 f(a_1+h_1, a_2)\, dt}_{\text{unique } o(h_1, h_2)}$$

:)

On revient à la définition avec ε.

Soit $\varepsilon>0$. Par définition de continuité $\partial_2 f$ en (a_1, a_2)

$\exists \alpha>0$ tq $\forall (b_1, b_2)$ tq $\|(b_1, b_2) - (a_1, a_2)\| < \alpha$

alors $\|\partial_2 f(b_1, b_2) - \partial_2 f(a_1, a_2)\| < \varepsilon$

* Donc pour $h_1 < \alpha$

$$\|(a_1+h_1, a_2) - (a_1, a_2)\|_\infty < \alpha$$

donc $\|\partial_2 f(a_1+h_1, a_2) - \partial_2 f(a_1, a_2)\| < \varepsilon$

donc $h_2 \partial_2 f(a_1+h_1, a_2)$

$$= h_2 \partial_2 f(a_1, a_2) + \|h\| \varepsilon_1(h)$$

où $\varepsilon_1(h) < \varepsilon$

* $\left\| \int_{a_2}^{a_2+h_2} \partial_2 f(a_1+h_1, t) - \partial_2 f(a_1+h_1, a_2)\, dt \right\|$

$$\leq \left| \int_{a_2}^{a_2+h_2} \|\partial_2 f(a_1+h_1, t) - \partial_2 f(a_1+h_1, a_2)\|\, dt \right|$$

si $h_2 < 0$

$$\leq \int_{a_2}^{a_2+h_2} \|\partial_2 f(a_1+h_1,t) - \partial_2 f(a_1,a_2)\| + \|\partial_2 f(a_1,a_2) - \partial_2 f(a_1+h_1,a_2)\| \, dt$$

$$\leq h_2(\varepsilon + \varepsilon)$$

si $h_2 < \alpha$

Bref : on a montré :

$$\delta_1(h) = h_2 \partial_2 f(a_1,a_2) + \|h\| \varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

De même :

$$\delta_2(h) = h_1 \partial_1 f(a_1,a_2) + \|h\| \varepsilon_2(h)$$

Donc $f(a_1+h_1, a_2+h_2) = f(a_1,a_2)$

$$+ h_1 \partial_1 f(a_1,a_2) + h_2 \partial_2 f(a_1,a_2)$$

$$+ o(h)$$

Donc f différentiable en (a_1,a_2).

Rque f est $\mathcal{C}^1$ ie $df : a \longmapsto df(a)$ continue

Relativement à la base fixée dans E et une base de F,

$$\mathrm{Mat}(df(a)) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \cdots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_p(a) & & \partial_n f_p(a) \end{pmatrix}$$

les coeff de cette matrice sont continus en a (par hyp).

donc

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R}) \\ a &\longmapsto \mathrm{Mat}(df(a)) \end{aligned} \quad \text{continue}$$

Or : ϕ $\begin{aligned} \mathcal{L}(E,F) &\longrightarrow \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R}) \\ u &\longmapsto \mathrm{Mat}(u) \end{aligned}$

ϕ est un isomorphisme d'ev, de dim finie

donc ϕ et ϕ^{-1} sont continues

donc $df = \phi^{-1} \circ (a \longmapsto \mathrm{Mat}(df(a)))$

est continue

Exemple. Montrer que :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, mais pas sur $\mathbb{R}^2$.

- Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

  $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ existent et sont continues

  <u>donc</u> f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

- f non continue en $(0,0)$ donc f n'est pas $\mathcal{C}^1$

  (ni pas différentiable en $(0,0)$)

  (et pourtant, $\partial_1 f(0,0)$ et $\partial_2 f(0,0)$ existent)

Exemple. Montrer que :
$$h\ :\ (r,\varphi,\theta)\mapsto(r\ \cos\theta\ \cos\varphi, r\ \cos\theta\ \sin\varphi, r\ \sin\theta)$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

4 Opérations sur les applications différentiables, sur les applications $\mathcal{C}^1$

4.1 Linéarité

Proposition. Soit $f, g : E \to F$ deux fonctions définies sur U ouvert, $a \in U$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si f et g sont différentiables en a, alors $\lambda f + \mu g$ aussi et :

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \mathrm{d}f(a) + \mu \mathrm{d}g(a)$$

Proposition. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi.

Proposition. Si f et g admettent des dérivées en a selon un vecteur v, alors $\lambda f + \mu g$ aussi et :

$$\mathrm{D}_v(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \mathrm{D}_v f(a) + \mu \mathrm{D}_v g(a)$$

Proposition. Si E est muni d'une base $\mathcal{B}$, si f et g admettent des dérivées partielles en a alors $\lambda f + \mu g$ aussi et :

$$\forall i,\ \partial_i(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \partial_i f(a) + \mu \partial_i g(a)$$

CL des DL_1

4.2 Composée avec une application bilinéaire ou multilinéaire

Proposition. Soit $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux fonctions définies sur U ouvert, $a \in U$. Soit $B : F \times G \to H$ une application bilinéaire. Si f et g sont différentiables en a, alors $B(f,g) : x \mapsto B(f(x), g(x))$ aussi et :

$$\forall h \in E,\ \mathrm{d}\big(B(f,g)\big)(a) \cdot h = B\big(\mathrm{d}f(a) \cdot h, g(a)\big) + B\big(f(a), \mathrm{d}g(a) \cdot h\big)$$

Proposition. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors $B(f,g)$ l'est aussi.

$$\left.\begin{array}{l} f : U \longrightarrow F \\ g : U \longrightarrow G \end{array}\right\} \quad B : F \times G \longrightarrow H$$

$$x \longmapsto B(f(x), g(x))$$

Si f, g différentiables en a,

alors $B(f,g)$ aussi et

$$d\,B(f,g)(a) : h \longmapsto B\big(df(a).h, g(a)\big) + B\big(f(a), dg(a).h\big)$$

Preuve: par les DL_1

$$f(a+h) = f(a) + df(a).h + \|h\| \varepsilon_1(h)$$

$$g(a+h) = g(a) + dg(a).h + \|h\| \varepsilon_2(h)$$

$$B(f(a+h), g(a+h)) = B(f(a), g(a)) + B(f(a), dg(a).h) + B(df(a).h, g(a))$$

$$+ \; B\big(f(a), \|h\| \,\varepsilon_2(h)\big) + B\big(\|h\|\,\varepsilon_1(h), g(a)\big) + B\big(df(a).h, dg(a).h\big) + [\ldots]$$

reste $o(h)$

B bilinéaire sur $F \times G$ de dim finie donc B continue, $\exists K$ tq $\forall x, y$

$$\|B(x,y)\| \leq K \|x\| \|y\|$$

donc $\|B(df(a).h, dg(a).h)\|$

$$\leq K \, \|df(a).h\| \, \|dg(a).h\|$$

$$\leq K \, |||df(a)||| \, \|h\| \, |||dg(a)||| \, \|h\|$$

$$= o(h)$$

de <u>plus</u>: $\|B(f(a), \|h\| \,\varepsilon_2(h))\|$

$$= \|h\| \; \underbrace{\|B(f(a), \varepsilon_2(h))\|}_{\xrightarrow[h \to 0]{} 0}$$

par continuité de B

[...]

Généralisation. Soit $f_1, \dots, f_p$ des fonctions définies sur U ouvert de E, à valeurs dans $F_1, \dots, F_p$ respectivement. Soit $a \in U$. Soit $M : F_1 \times \cdots \times F_p \to G$ une application p-linéaire. Si $f_1, \dots, f_p$ sont différentiables en a, alors $M(f_1, \dots, f_p) : x \mapsto M(f_1(x), \dots, f_p(x))$ aussi et, pour tout $h \in E$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\big(M(f_1, \dots, f_p)\big)(a) \cdot h = M\big(\mathrm{d}f_1(a) \cdot h, f_2(a), \dots, f_p(a)\big) + M\big(f_1(a), \mathrm{d}f_2(a) \cdot h, \dots, f_p(a)\big) \\ + \cdots + M\big(f_1(a), f_2(a) \dots, \mathrm{d}f_p(a) \cdot h, \big) \end{aligned}$$

Proposition. Si les f_k sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors $M(f_1, \dots, f_p)$ l'est aussi.

$(g\circ f)' = f' \times g'\circ f$

4.3 Composition d'applications différentiables

Règle de la chaîne. Soit $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ deux applications, avec f définie sur U ouvert de E, g définie sur V ouvert de F et f à valeurs dans V.
Soit $a \in U$. Si f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et :

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g\big(f(a)\big) \circ \mathrm{d}f(a)$$

Proposition. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et V respectivement, alors $g \circ f$ est $\mathcal{C}^1$ sur U.

$$\begin{tikzcd} \underset{U}{E} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & \underset{V}{F} \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

$df(a) : E \longrightarrow F$ linéaire

$dg(b) : F \longrightarrow G$ linéaire

Preuve:

$$f(a+h) = f(a) + df(a).h + \|h\|\, \varepsilon_1(h)$$

$$g(b+k) = g(b) + dg(b).k + \|k\|\, \varepsilon_2(k)$$

$$g\circ f(a+h) = g\Big[\underbrace{f(a)}_{b} + \underbrace{df(a).h + \|h\|\,\varepsilon_1(h)}_{k}\Big]$$

$$= g(f(a))$$
$$+\, dg(f(a)).\big(df(a).h + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\big)$$
$$+\, \|df(a).h + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\|\,\varepsilon_3(h)$$

$$= g(f(a))$$

$$+ \underbrace{dg(f(a)) \circ df(a) \cdot h}_{\text{c'est } d(g\circ f)(a)\cdot h}$$

$$+ \|h\| \underbrace{\left[C\,\varepsilon_1(h) + |||df(a)|||\,\varepsilon_3(h) \dots \right]}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0}$$

4.4 Dérivée le long d'un arc

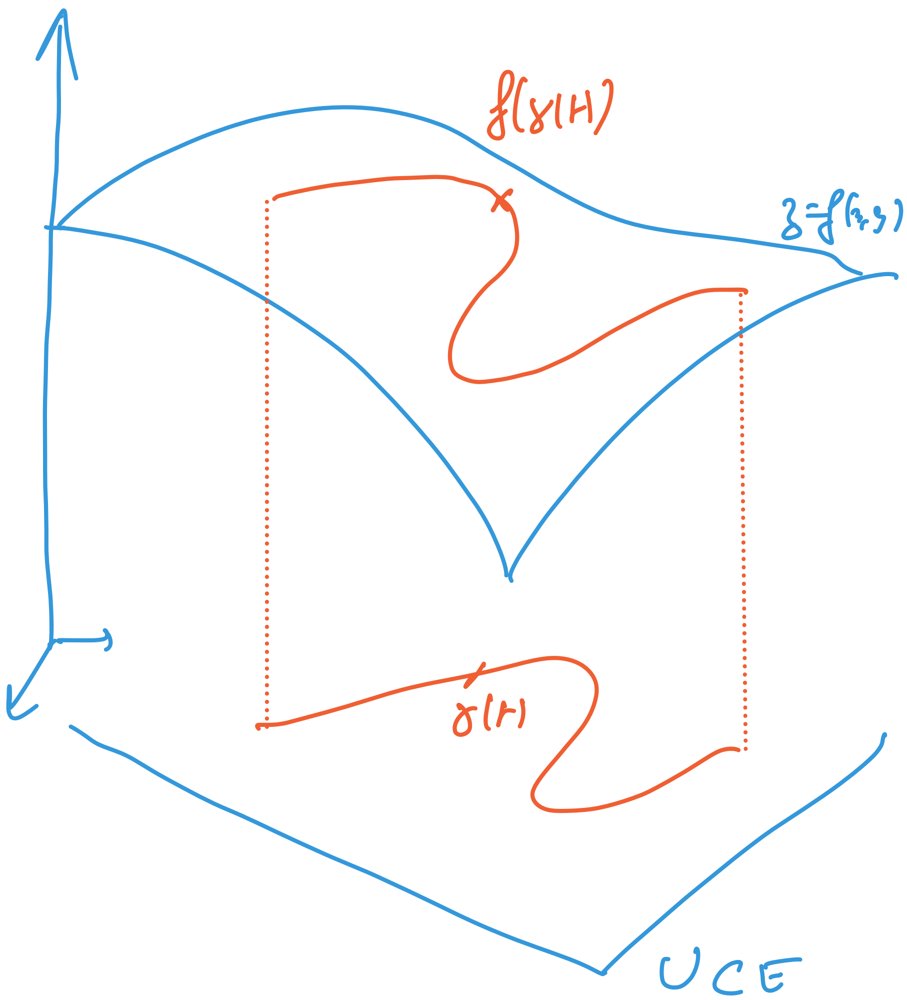
Dérivée le long d'un arc. Soit $\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} E \xrightarrow{f} F$ deux applications, avec γ un arc défini sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, f définie sur un ouvert U et γ à valeurs dans U. Soit $t \in I$. Si γ est dérivable en t et f différentiable en $\gamma(t)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et :

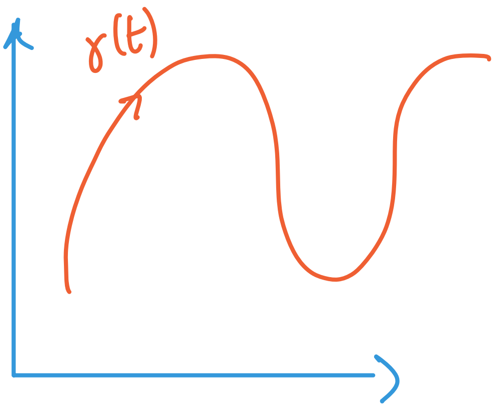
$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$$

Dans le cas où E est muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et que $x_1, \dots, x_n$ désignent les applications coordonnées de γ dans cette base, cela s'écrit :

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k'(t) \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

Proposition. Si γ et f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et U respectivement, alors $f \circ \gamma$ est $\mathcal{C}^1$ sur I.





$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & f\circ\gamma(t) \end{array}$$

Preuve:

$$f\circ\gamma(t+h) = f\big(\gamma(t+h)\big)$$

$$= f\big(\gamma(t) + h\gamma'(t) + h\,\underset{\substack{\downarrow h\to 0\\ 0}}{\varepsilon(h)}\big)$$

$$= f(\gamma(t))$$
$$+ df(\gamma(t)).\big(h\gamma'(t) + h\varepsilon(h)\big)$$
$$+ h\,\varepsilon_2(h)$$

$$= f(\gamma(t))$$
$$+ h.\,df(\gamma(t)).\,\gamma'(t)$$
$$+ h\,df(\gamma(t)).\varepsilon(h)$$
$$+ h\,\varepsilon_2(h) \quad o(h)$$

$$f(b)-f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$$

Corollaire. Soit $[0,1] \xrightarrow{\gamma} E \xrightarrow{F} F$ deux applications, avec γ un arc défini sur un intervalle $[0,1]$, f définie sur un ouvert U et γ à valeurs dans U. Soit $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$. Si γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors :

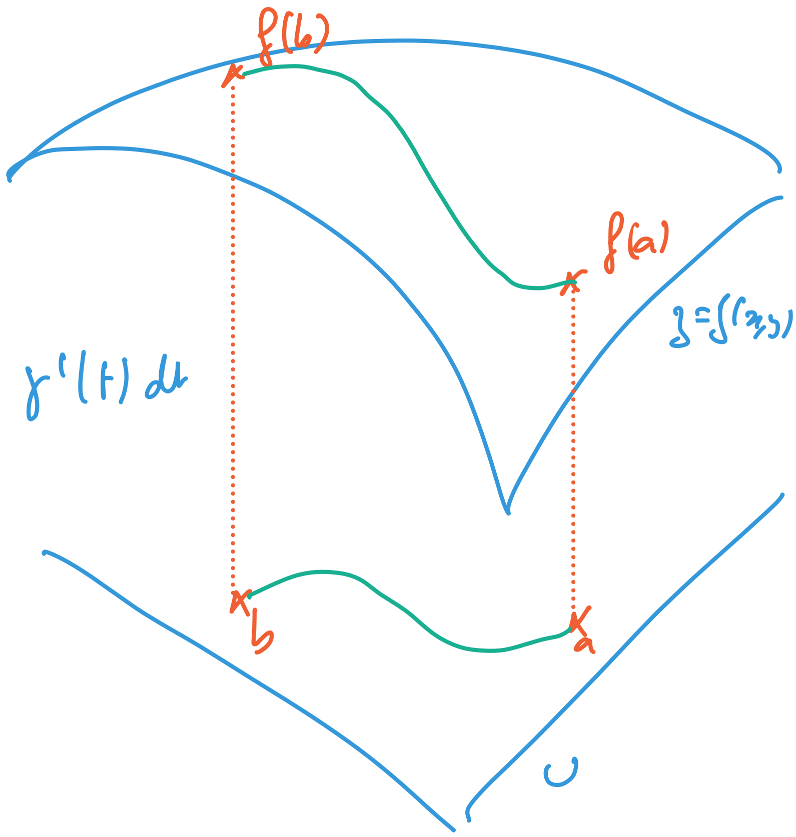
$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. *En particulier, avec $\gamma(t) = a + tv$:*

$$f(a+v) = f(a) + \int_0^1 \mathrm{d}f(a+tv) \cdot v\,\mathrm{d}t$$

$\gamma(0) = a$

$\gamma(1) = b$



$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) . \gamma'(t)\,dt$$

intégrale d'une fct de variable réelle.

preuve $\quad f(b) - f(a) = f\circ\gamma(1) - f\circ\gamma(0)$

$$= [f\circ\gamma]_0^1$$

$$= \int_0^1 (f\circ\gamma)'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 df(\gamma(t)) . \gamma'(t)\,dt$$

Exemple. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et t : $\big(u(t), v(t)\big)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$h\,:\,t \mapsto f\big(u(t), v(t)\big)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $h'(t)$ à l'aide des dérivées partielles de f et des dérivées de u et v.

Exemple. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et t : $\big(u(t), v(t), w(t)\big)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$h\,:\,t \mapsto f\big(u(t), v(t), w(t)\big)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $h'(t)$ à l'aide des dérivées partielles de f et des dérivées de u, v et w.

$$h(t) = f(u(t), v(t))$$

$$h'(t) = u'(t)\,\partial_1 f(u(t), v(t)) + v'(t)\,\partial_2 f(u(t), v(t))$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{du}{dt}\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial h}{\partial v}$$

4.5 Calcul des dérivées partielles d'une fonction composée

Exemple. Soit

$$\begin{array}{rcl} f \,:\, \mathbb{R}^3 & \to & F \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & f(x_1, x_2, x_3) \end{array}$$

de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert V, et

$$\begin{array}{rcl} g \,:\, \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & \big(g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v)\big) \end{array}$$

de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U et à valeurs dans V.
On considère la composée :

$$h \,:\, (u, v) \mapsto f\big(g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v)\big)$$

Justifier que h est $\mathcal{C}^1$ sur V, et exprimer les dérivées partielles de h en fonction de celles de f et g.

Exemple. Dans le plan euclidien usuel, exprimer le gradient en coordonnées polaires.

Exemple. Écrire les dérivées partielles de :

$$(u_1, \dots, u_m) \mapsto f\big(x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_m(u_1, \dots, u_m)\big)$$

4.6 Caractérisation des applications constantes

Théorème.

Soit $f : E \to F$ une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert, avec E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie. On suppose U convexe. Alors :

$$f \text{ est constante sur } u \iff \mathrm{d}f \text{ est nulle sur } U$$

Remarque. *Le résultat est encore valable si U n'est que connexe par arcs.*

Preuve:

$\boxed{\Rightarrow}$ $f(a+h) = f(a) + 0 \cdot h + o$

donc $df(a) \cdot h = 0$ $\forall h$, $\forall a$

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $a, b \in U$

$\gamma : [0,1] \longrightarrow U$

$t \longmapsto (1-t)a + tb$

$= a + t(b-a)$

$\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$

$f(b) = f(a) + \int_0^1 \underbrace{df(\gamma(t))}_{=0} \cdot \gamma'(t)\, dt$

$= f(a)$