$\boxed{7}$ a) $A \in S_n^{++}$ et $B \in S_n^{+}$, donc d'après le

simultanée : $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ et D diagonale

$A = P^T P$ et $B = P^T D P$

~~$\det(A+B) = \det(P^T P + P^T D P)$~~

~~$= \det(I_n + P^T D P)$ car $P^T =$~~

$\det(A) + \det(B) = \det(P^T P) + \det(P^T D P$

$= \det(I_n) + \det(D)$

$= 1 + \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ où $\lambda_i =$

$\leq \prod_{i=1}^{n} (1+\lambda_i)$

$= \det(I_n + D)$

$= \det(A+B)$

$A_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$

$S^T = S$ et que $\langle A, S \rangle = 0$ $(A^T = -A)$

car $tr(A^T S) = -tr(AS) = tr((A^T S)^T)$

remarquant et $tr(S^T A) = tr(SA) = tr(AS)$

conséquence de l'orthogonalité

$S_n(\mathbb{R})$ soit en somme directe

, si on suppose par l'absurde qu'il existe

$\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$

ant $B^T = B = -B$

B n'existe pas, ainsi $A_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R}) = \emptyset$

$A_n(\mathbb{R})$ est bien en somme directe avec $S_n(\mathbb{R})$

illeurs ~~Im~~ $A_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$

il n'existe aucune matrices dans l'un des

x espaces qui ne soit pas dans $M_n(\mathbb{R})$

par ailleurs toutes matrices y appartenant forment

$M_n(\mathbb{R})$

donc $\boxed{A_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})}$

et $\{0_{\mathcal{M}_n\mathbb{K}}\}$ fermé donc $\varphi^{-1}(\{0_{\mathcal{M}_n\mathbb{K}}\})$,

donc $\boxed{\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \text{ fermé}}$ gè ...

4 c) Soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'é...

et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$M_p = \frac{1}{p}\, I_n - ~~I_{d_n}~~ M$$ plutôt

donc $\det(M_p) = \det\left(\frac{1}{p} I_n - M\right)$

$$= (-1)^n \det\left(M - \frac{1}{p} I_n \ldots\right.$$

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque po...

$= \lambda_i \, \|x\|$

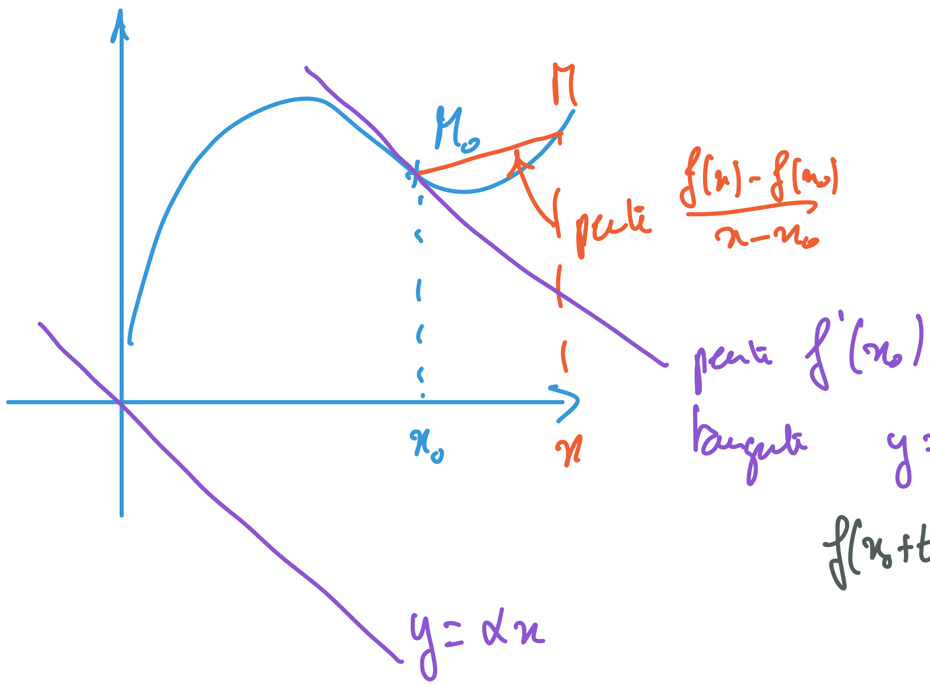
$\ldots x\rangle > 0$ car u est défini positif

$\ldots 0$ donc $\lambda_i > 0$.

$\ldots \lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$

$\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ Oui

N° .../...



tangente $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$$f(x_0+t) = \underbrace{f(x_0) + \boxed{f'(x_0)\, t}}_{\text{éq de tgte}} + o(t)$$

Calcul différentiel

Sauf mention contraire, E et F designent des espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

1 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

1.1 Dérivée selon un vecteur

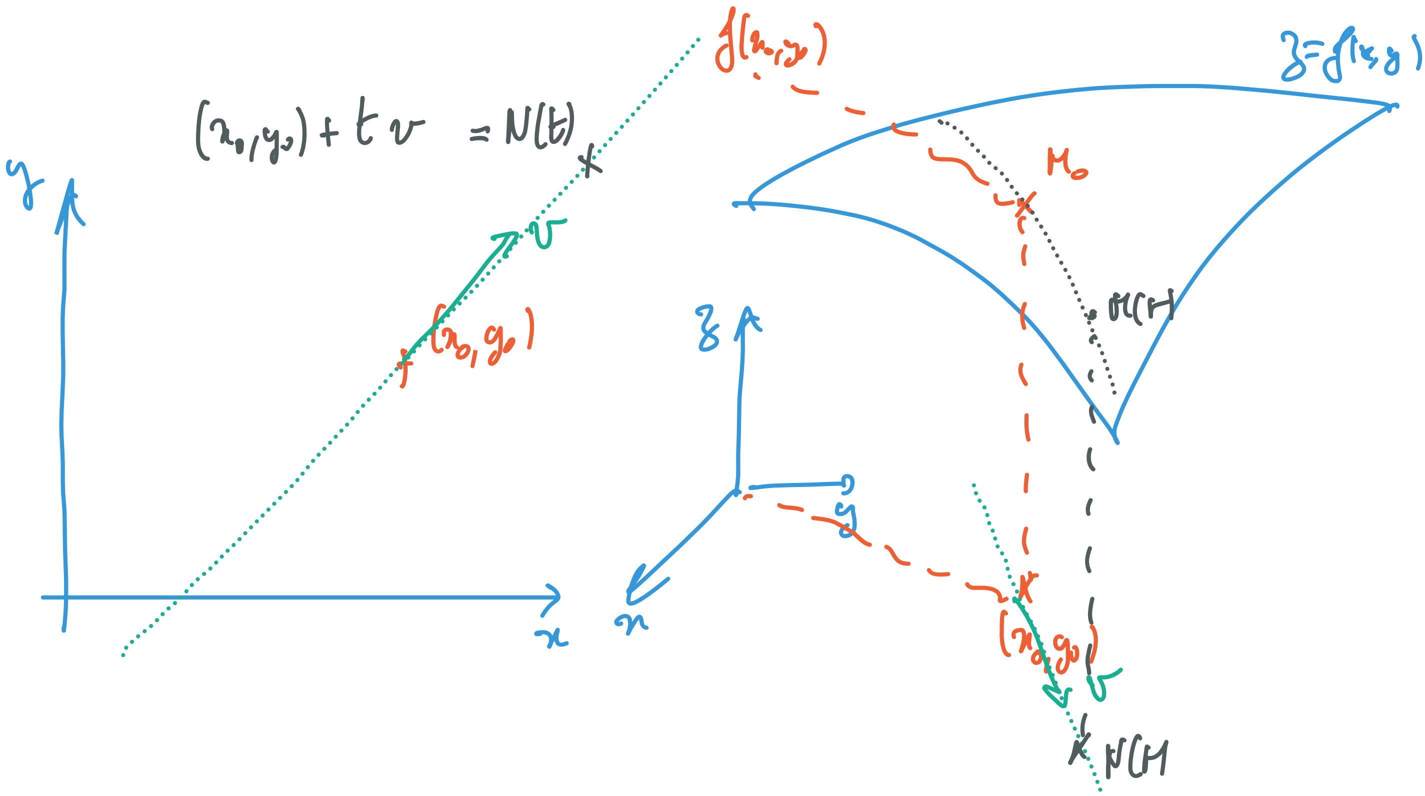
Définition. Soit $f : E \to F$ une fonction définie sur un ouvert U. Soit $a \in U$ et $v \in E$. On dit que f **admet un dérivée en** a **selon** v lorsque :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & F \\ t & \mapsto & f(a+tv) \end{array}$$

est dérivable en 0.
Dans ce cas, on note $\mathrm{D}_v f(a)$ la dérivée en 0 de cette application, et on l'appelle **dérivée de** f **en** a **selon** v.

Remarque.

- *Comme U est ouvert, c'est un voisinage de a, et donc il existe $\delta > 0$ tel que, $\forall t \in [-\delta, \delta]$, $a + tv \in U$: la fonction $t \mapsto f(a+tv)$ est définie au voisinage de 0.*
- *$\mathrm{D}_v f(a)$ est un élément de F.*



fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f admet une dérivée en (x_0, y_0) dans la direction de v <u>si</u> $t \longmapsto f((x_0, y_0) + t v)$ est dérivable en 0.

Dans ce cas, on appelle $D_v f(x_0, y_0)$ cette dérivée (nombre)

Exemple. On considère :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f admet une dérivée en $(0,0)$ selon tout vecteur $v = (\alpha, \beta)$. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

$$f((0,0)+t(\alpha,\beta)) = \frac{\alpha\beta^2 t^3}{\alpha^2 t^2 + \beta^4 t^4}$$

$$= \frac{\alpha\beta^2 t}{\alpha^2 + \beta^4 t^2}$$

<u>1er cas:</u> si $\alpha = 0$ $\quad f((0,0)+t(0,\beta)) = 0$

dérivable en 0, de dérivée nulle

donc $D_{(0,\beta)} f(0,0) = 0$

<u>2e cas:</u> si $\alpha \neq 0$ $\quad f((0,0)+t(\alpha,\beta)) = \dfrac{\alpha\beta^2 t}{\alpha^2}(1 + O(t^2))$

$$= 0 + \frac{\beta^2}{\alpha} t + o(t)$$

donc $D_{(\alpha,\beta)} f(0,0) = \dfrac{\beta^2}{\alpha}$

<u>Continuité:</u> f non continue en $(0,0)$

$$f(t^2, t) = \ldots$$

1.2 Dérivées partielles dans une base

Définition. On suppose E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. On considère $f : E \to F$ une fonction définie sur U ouvert de E, et $a \in U$.
Si f est dérivable en a selon e_i pour $i \in \{1, \dots, p\}$, on dit que f **admet des dérivées partielles dans la base** $\mathcal{B}$, et on note :

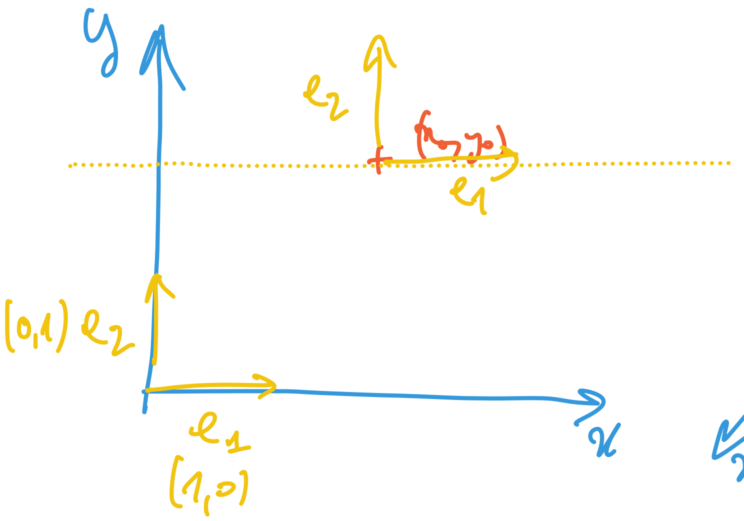
$$\partial_i f(a) = \mathrm{D}_{e_i} f(a)$$

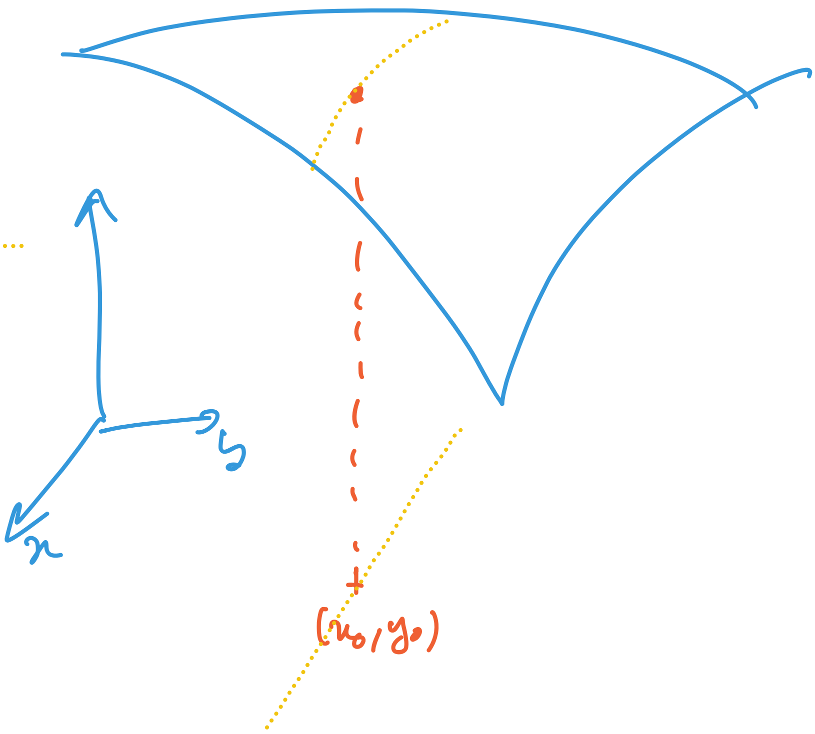
Remarque.

- *En notant $(a_1, \dots, a_n)$ les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de a, $\partial_i f(a)$ est, si elle existe, la dérivée en a_i de :*

$$t \mapsto f(a_1 e_1 + \dots + t e_i + \dots + a_n e_n)$$

- *On utilise aussi la notation $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ pour désigner $\partial_i f(a)$.*
- *Lorsqu'une base $\mathcal{B}$ de E est fixée, on identifie $f(x)$ et $f(x_1, \dots, x_n)$, où $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.*
- *Souvent, $E = \mathbb{R}^2$ (ou $E = \mathbb{R}^3$) et la base $\mathcal{B}$ est canonique. On note alors $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ et les dérivées partielles, lorsqu'elles existent, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.*





$$f\big((x_0,y_0) + t(1,0)\big) = f(x_0+t, y_0)$$

dérivable en $t=0$?

On note $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial 1}$ ou $\partial_1 f$

Exemple: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Mq f dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter $f'(x)\ \forall x$

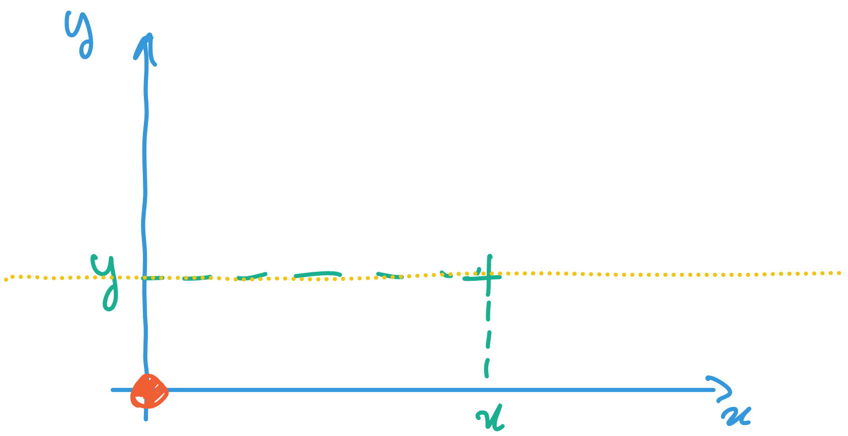
Exemple. On considère :

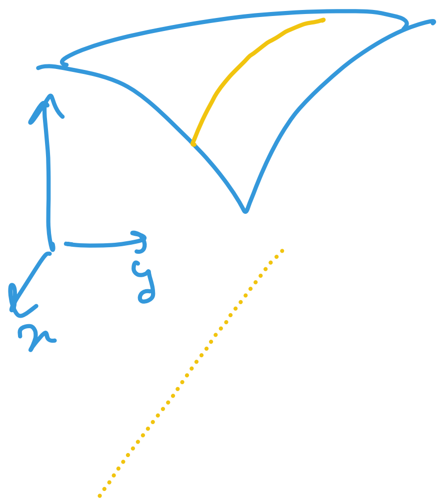
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point, et les calculer.

dérivées partielles pour $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

sont dérivées des applications partielles.





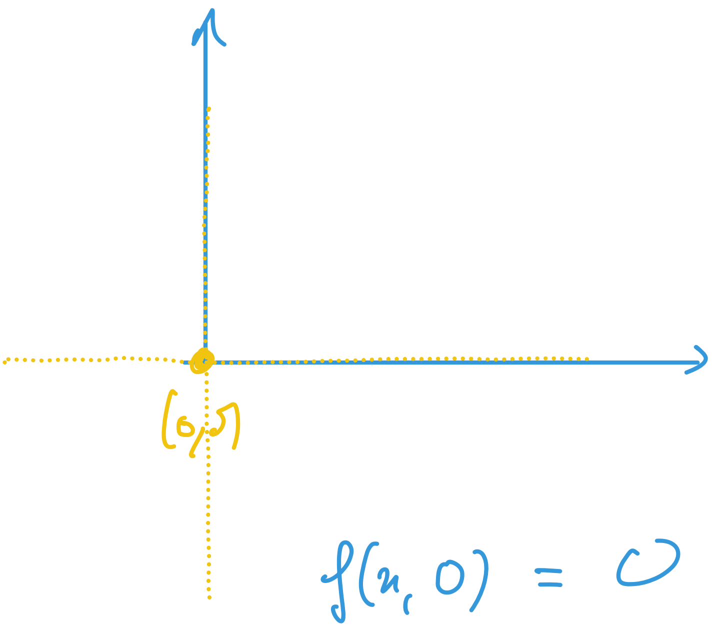
$(x,y) \neq (0,0)$

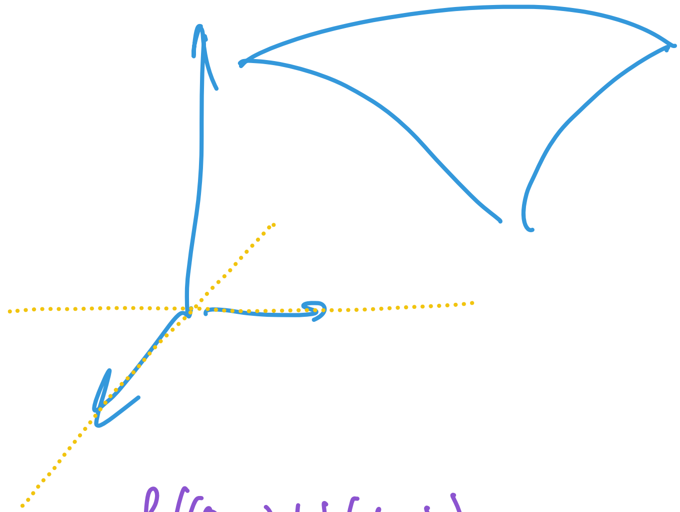
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est la dérivée en x de $x \mapsto f(x,y)$ y fixé

$$= \frac{y^2(x^2+y^4) - xy^2(2x)}{(x^2+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x2y(x^2+y^4) - xy^2\, 4 \cdot y^3}{(x^2+y^4)^2}$$

en $(0,0)$





$f((0,0)+t(1,0))$

$f(x,0) = 0$

dérivable en 0, de dérivée nulle

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$f(0,y) = 0$

donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Rmq : f admet des dérivées partielles en $(0,0)$

mais non continue en $(0,0)$

Exemple. Calculer les trois dérivées partielles dans la base canonique, en un point quelconque, de l'application :

$$f \,:\, (r, \varphi, \theta) \mapsto (r\, \cos\theta\, \cos\varphi, r\, \cos\theta\, \sin\varphi, r\, \sin\theta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r, \varphi, \theta) = (\cos\theta \cos\varphi,\ \cos\theta \sin\varphi,\ \sin\theta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}(r, \varphi, \theta) = (-r \cos\theta \sin\theta,\ r\cos\theta \cos\varphi,\ 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \varphi, \theta) = (-r \sin\theta \cos\varphi,\ -r \sin\theta \sin\varphi,\ r\cos\theta)$$

2 Différentielle

2.1 Notation $o(h)$

Définition. Soit $\alpha : E \to F$ définie sur un voisinage de 0_E. On dit que :

$$\alpha(h) \underset{h\to 0_E}{=} o(h)$$

lorsque $\|\alpha(h)\|_F \underset{h\to 0_E}{=} o(\|h\|_E)$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\|h\|_E}\alpha(h) \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_F$$

autre façon de l'écrire : $\alpha(h) = \|h\|_E \, \varepsilon(h)$

où $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_F$

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ h \mapsto f'(a).h \end{array}$$ linéaire

2.2 Différentielle d'une application en un point

Rappel. *Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert I, et $a \in I$, on dit que f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ telle que :*

$$f(a+h) = f(a) + \ell h + \underset{h \to 0}{o}(h)$$

et l'application $h \mapsto \ell h$ est linéaire. C'est cette application linéaire qui permet la généralisation de la dérivation aux fonctions de variable vectorielle.

Définition. Soit $f : E \to F$ une fonction définie sur un ouvert U, et $a \in U$. On dit que **f est différentiable en a** lorsqu'il existe une application linéaire $\ell \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \underset{h \to 0_E}{o}(h)$$

L'application ℓ est alors unique, et appelée **différentielle de f en a**, notée $\mathrm{d}f(a)$.

Remarque.

- *La différentielle de f en a s'appelle aussi* ***application linéaire tangente à f en a****.*
- *La différentiabilité de f en a, c'est l'existence d'un* ***développement limité à l'ordre** 1 **en** a :*

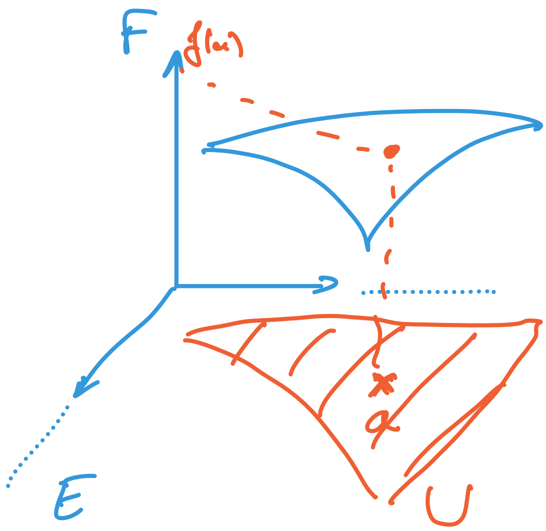
$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + \underset{h \to 0_E}{o}(h)$$

  où $\mathrm{d}f(a) \in \mathcal{L}(E, F)$.
- *On note souvent $\mathrm{d}f(a) \cdot h$ pour désigner $\big(\mathrm{d}f(a)\big)(h)$.*

$f : E \longrightarrow F$

définie sur U

pas linéaire



$\mathrm{d}f(a) : E \longrightarrow F$ définie sur E

linéaire

Exemple. Déterminer la différentielle en $a = (2, 1)$ de :

$$f : (x, y) \mapsto x^2 y^3$$

$f(2+dx, 1+dy) =$ $\qquad$ $h = (dx, dy)$

$f(2+x, 1+y) =$ ambigu $(x,y) \to (0,0)$

$f(2+h, 1+k)$

$f(2+u, 1+v)$

$f(2+a, 1+b)$

$$f(2+dx, 1+dy) = (2+dx)^2 (1+dy)^3 \qquad (dx,dy) \to (0,0)$$

$$= \big(4 + 4dx + o(dx)\big)\big(1 + 3dy + o(dy)\big)$$

$$= \underbrace{4}_{f(2,1)} + \underbrace{4dx + 12dy}_{\text{linéaire en } (dx,dy)} + \underbrace{o\big((dx,dy)\big)}$$

donc, $df(2,1) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(dx, dy) \longmapsto 4dx + 12dy$$

Exemple. Calculer la différentielle en $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & X^2 \end{array}$$

Pour $H \to 0$,

$$f(M+H) = (M+H)^2$$

$$= \underbrace{M^2}_{f(M)} + \underbrace{HM + MH}_{\text{linéaire en } H} + \underset{o(H)}{H^2}$$

On choisit $\|\cdot\|$ norme sous-multiplicative

en effet. $\|H^2\| \leq \|H\|^2$

$$= \|H\| \cdot \underbrace{\|H\|}_{\xrightarrow[H \to 0]{} 0}$$

CCl : $df(M) : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ H & \longmapsto & MH + HM \end{array}$

$\begin{cases} f(X+dX) \\ f(M+dM) \end{cases}$ $\quad dX \quad dX$

Exemple. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint de E. Montrer que :

$$f : x \mapsto \langle x, u(x) \rangle$$

est différentiable en tout $a \in E$, et calculer sa différentielle.

Soit $h \to 0$

$$f(a+h) = \langle a+h, u(a+h) \rangle$$

$$= \langle a+h, u(a)+u(h) \rangle$$

$$= \underbrace{\langle a, u(a) \rangle}_{f(a)} + \underbrace{\langle h, u(a) \rangle + \langle a, u(h) \rangle} + \underbrace{\langle h, u(h) \rangle}_{o(h)\ ..}$$

linéaire en h

en effet : $|\langle h, u(h) \rangle| \leq \|h\| \, \|u(h)\|$ Cauchy-Schwarz

$$= \|h\| \, \underbrace{\|u(h)\|}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ h \to 0}}$$

par continuité de u linéaire

Donc $df(a) : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$h \longmapsto \langle a, u(h) \rangle + \langle h, u(a) \rangle$$

$$= 2 \langle u(a), h \rangle$$

car $u \in S(E)$.

Proposition. Soit $f : E \to F$ définie sur U ouvert.

- Si f est constante, alors elle est différentiable en tout point de u et :

$$\forall a \in U,\ \mathrm{d}f(a) = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$$

- Si f est (la restrictuion d'une application) linéaire, alors elle est différentiable en tout point de u et :

$$\forall a \in U,\ \mathrm{d}f(a) = f$$

Preuves

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ Pour $h \to 0$

$f(a+h) = f(a) + f(h)$ par linéarité

$= \underbrace{f(a)}_{f(a)} + \underbrace{f(h)}_{\text{linéaire en } h} + \underbrace{0}_{o(h)}$

donc $df(a) : h \longmapsto f(h)$

Proposition. Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

<u>Preuve</u>. $f(a+h) = f(a) + \underbrace{df(a).h}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0} + \underbrace{o(h)}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0}$

par continuité de $df(a)$ (linéaire en dim finie)

Proposition. Si f est différentiable en a, alors f admet des dérivées en a selon tout vecteur et :

$$\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot v$$

Corollaire. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et si f est différentiable en a, alors f admet des dérivées partielles en a dans la base $\mathcal{B}$ et :

$$\forall h \in E,\ \mathrm{d}f(a) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

où $(h_1, \dots, h_n)$ sont les coordonnées de h dans $\mathcal{B}$.

Preuve :

Soit $v \in E$

Pour $t \to 0_{\mathbb{R}}$ $\qquad tv \xrightarrow[t\to 0]{} 0_E$

$$f(a+tv) = f(a) + df(a).(tv) + o(tv)$$

$$= f(a) + t.\underbrace{df(a).v}_{} + \underbrace{o(tv)}_{?}$$

par linéarité de $df(a)$

$$o(tv) = \|tv\| \underbrace{\varepsilon(t)}_{\xrightarrow[t\to 0]{} 0}$$

$$= |t|\ \|v\|\ \varepsilon(t)$$

$$= o(t)$$

Bref : $f(a+tv) = f(a) + t.\,df(a).v + o(t)$

$DL_1(a)$ de $t \mapsto f(a+tv)$

donc $D_v f(a) = df(a).v$

Preuve : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E.

$h \in E$, $(h_1, \dots, h_n)$ ses coord dans $\mathcal{B}$.

$$df(a).h = df(a).\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i \underbrace{\underbrace{df(a).e_i}_{D_{e_i}f(a)}}_{\partial_i f(a)} \quad \text{linéarité}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(a)$$

Ccl : Si f différentiable en a,
alors sa différentielle s'exprime avec
les dérivées partielles en a

Définition. Dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$, lorsque $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en a, on appelle **matrice jacobienne de** f **en** a la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases canoniques :

$$\mathrm{J}_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$$

où $f_1, \dots, f_n$ sont les fonction coordonnées de f.

$$J_f(a) = \mathrm{Mat}(df(a), \text{can.})$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ x & \longmapsto & (f_1(x) \dots f_m(x)) \end{array}$$

$$df(a) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ h & \longmapsto & \begin{pmatrix} df_1(a).h \\ \vdots \\ df_m(a).h \end{pmatrix} \end{array}$$

chaque $df_j(a)$ est une forme linéaire,
dont la matrice est une ligne.
(une ligne de $J_f(a)$)