Pour dimanche soir : ex à rédiger 46.9, 46.10, 47.4, 57.13, 58.1,

Continuité des fonctions de plusieurs variables

Dans tout le chapitre, et sauf mention contraire, E, F, G désignent des espaces vectoriels réels de dimension finie.

1 De quoi parle-t-on ?

1.1 Des fonctions entre espaces vectoriels normés

On peut s'intéresser à des fonctions :

$$f : \begin{array}{rcl} A \subset E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

et se poser la question de la continuité de f.

Exemple. $f : M \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{tr}(M^\top M)}$ est une fonction $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

Exemple. $u : f \mapsto \displaystyle\int_0^1 \cos(f(t))\,\mathrm{d}t$ est une fonction $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

f est continue.

- On sait que $\mathrm{tr}(M^T M) = 0 \iff M = 0$

- M1 : $M \mapsto M^T$ continue sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ car linéaire sur espace de dim finie

  $(M,N) \mapsto MN$ continue car bilinéaire

  $M \mapsto (M^T, M)$ continue

  tr continue car linéaire + dim finie

  donc $M \mapsto \mathrm{tr}(M^T M)$ continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ continue sur $\mathbb{R}^*$

donc f continue $M_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

<u>ex2</u>. $tr(M^T M) = \sum_{i,j} m_{ij}^2$

continue car polynomiale en les coeff. de M.

[...].

Exemple. $u : f \mapsto \int_0^1 \cos(f(t))\,\mathrm{d}t$ est une fonction $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

$\|\cdot\|_\infty$

$$|u(f) - u(g)| = \left| \int_0^1 \cos(f(t)) - \cos(g(t))\, dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 |\cos(f(t)) - \cos(g(t))|\, dt$$

$$\leq \int_0^1 1.\,|f(t) - g(t)|\, dt$$

par l'inégalité des acc. finis, avec $|\cos'(\theta)| \leq 1 \ \forall \theta$

$$\leq \|f - g\|_\infty$$

donc u 1-lipschitzienne donc continue.

Définition. Soit $f : E \to F$ définie sur A.

- Soit $a \in \overline{A}$ et $b \in F$. On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A\ \|x - a\|_E \leqslant \eta \implies \|f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon$$

- Soit $a \in A$. On dit que f est **continue en** a lorsque :

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$$

- f est **continue sur** A lorsqu'elle est continue en tout point de A.
- Soit $a \in \overline{A} \setminus A$ un point adhérent de A où f n'est pas définie. On dit que f se prolonge par continuité en a si f admet une limite b en a. La fonction prolongée est :

$$f : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ b & \text{si } x = a \end{cases}$$

  Elle est continue en a.

Remarque. *La continuité peut être établie « par opérations algébriques » sur des fonctions que l'on sait continues.*

1.2 Des fonctions entre espaces vectoriels normés automatiquement continues

Proposition.

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et E de dimension finie, alors f est continue.
- En particulier, si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, les applications : $\pi_i : x \mapsto x_i$, où $(x_1, \ldots, x_n)$ est le n-uplet des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$, sont continues.
- Si f est multilinéaire sur un produit d'espaces normés de dimension finie, alors f est continue.
- Si f est polynomiale sur un espace normé de dimension finie, alors f est continue.

1.3 Des fonctions de plusieurs variables

Remarque. *Fréquemment, on étudie des fonctions :*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^p \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)) \end{array}$$

La continuité de f est équivalente à la continuité de $f_1, \dots, f_p$. On peut donc se contenter d'étudier les fonctions numériques de plusieurs variables.

Remarque. *La compréhension de la continuité pour les fonctions de deux variables est indispensable pour l'étude des fonctions de n variables.*

Proposition. Les applications :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & y \end{array}$$

sont continues. car linéaires sur $\mathbb{R}^2$ de dim finie

Exemple. Étudier la continuité de :

$$f : (x, y) \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) \ln(x^2 + y^2)$$

sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

En effet : "par opérations".

ici : $(x,y) \longmapsto x$ continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

donc $(x,y) \longmapsto x^2$ " "

de même $(x,y) \longmapsto y^2$ " "

donc $(x,y) \longmapsto x^2+y^2$ " "

de plus $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $x^2+y^2 \geqslant y^2 > 0$

Et ln continue sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $(x,y) \longmapsto \ln(x^2+y^2)$ cont sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

[...]

2 Techniques d'étude de la continuité des fonctions de deux variables

2.1 Montrer la continuité « par opérations », sauf éventuellement en un point

Exemple. Montrer que la fonction :

$$f\ :\ (x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{\big(\sin(x^2+y^2)\big)^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

- $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $x^2+y^2\neq 0$

  donc f continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par op. sur les fct continues.

- <u>Étude de la continuité en $(0,0)$</u>

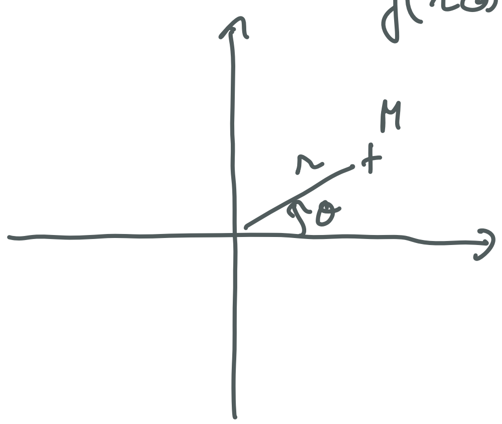
  Fréquemment : on travaille pour $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta\end{cases}$

  $x^2+y^2=r^2$ indép de θ

  $$(x,y)\to(0,0) \iff \|(x,y)\|_2 \to 0$$
  $$\qquad\qquad\qquad\iff |r|\to 0$$

  Pour avoir $f(x,y)\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$, on montre que

  $f(r\cos\theta, r\sin\theta)\underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$ <u>indépendamment de θ</u>

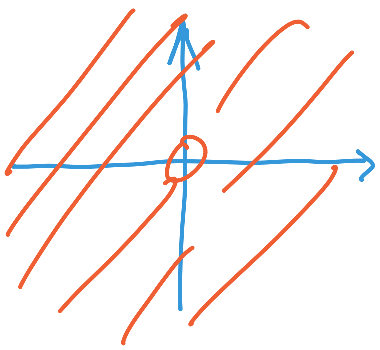


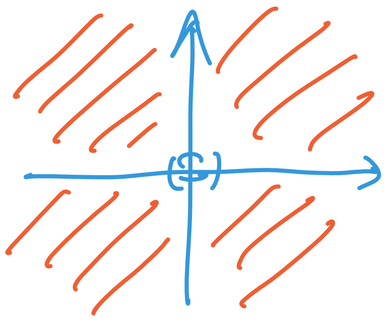
Ici :

$$
\begin{aligned}
|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| &= \frac{(\sin(r^2))^2}{r^2} \quad \underline{\text{indép de } \theta}. \\
&\leq \frac{r^4}{r^2} \\
&= r^2 \\
&\xrightarrow[r\to 0]{} 0
\end{aligned}
$$

donc $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} f(0,0)$ donc f continue en $(0,0)$.

Rmq : $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \neq (\mathbb{R}^*)^2$





2.2 Montrer la non continuité en un point particulier

Exemple. Étudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction :

$$f\ :\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

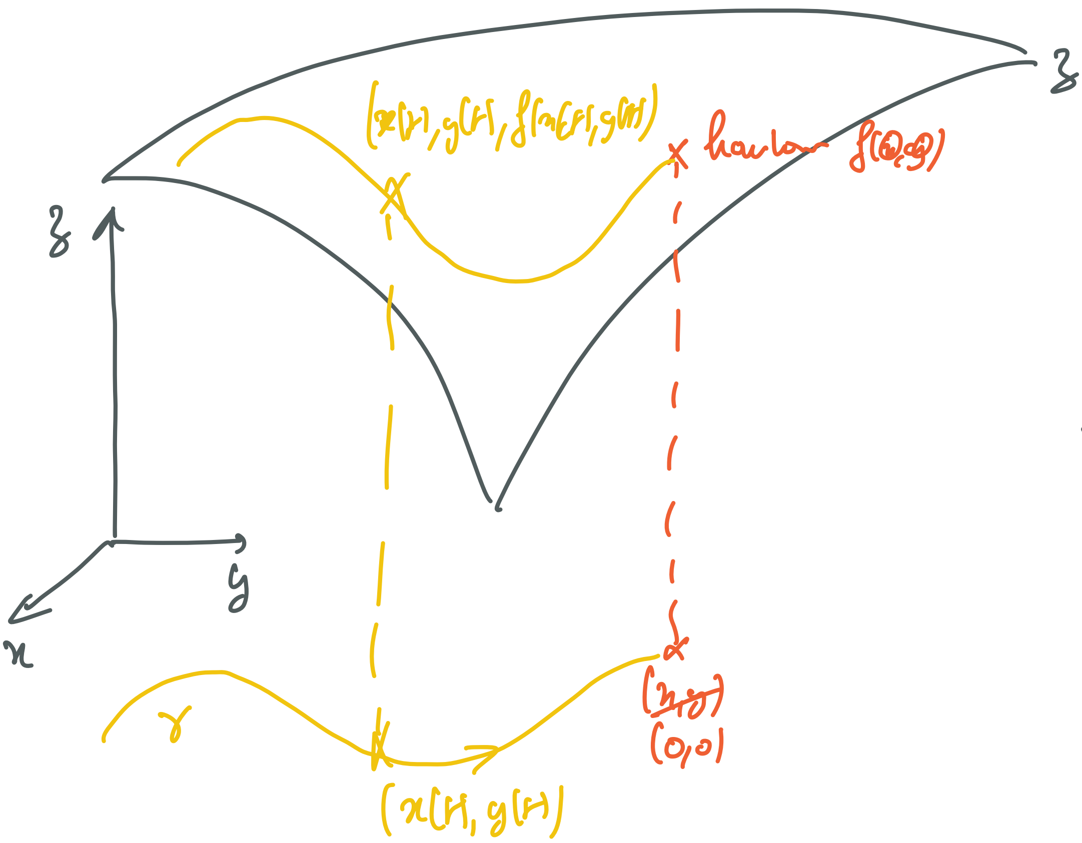
<u>Idée 1</u> : Si f continue en $(0,0)$
f tend vers ℓ en $(0,0)$
Alors les 2 applications partielles

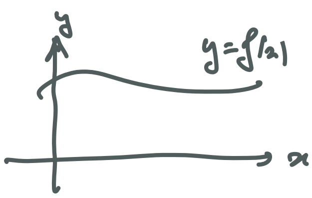
$$f(0,\cdot) \quad \text{et} \quad f(\cdot,0) : x \longmapsto f(x,0)$$

sont continues en 0
tendent vers ℓ.

<u>Idée 2</u> : Si $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \ell$
Alors, pour tout chemin $(x(t),y(t)) \xrightarrow[t\to 0]{} (0,0)$

$$f(x(t),y(t)) \xrightarrow[t\to 0]{} \ell$$





idée 3 ~~passer en polaire~~

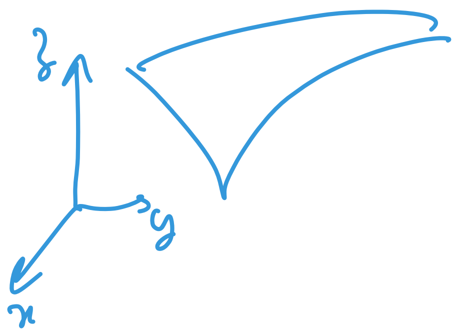
↳ non ! oui pour montrer la continuité, pas vraiment pour la non continuité.

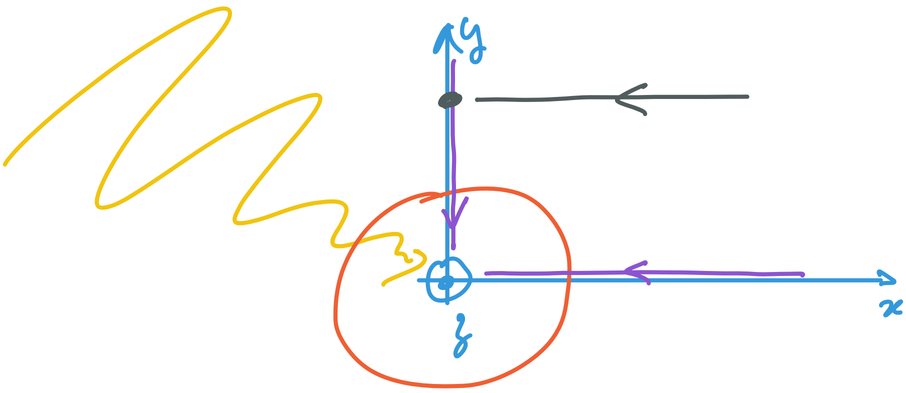
2.2 Montrer la non continuité en un point particulier

Exemple. Étudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction :

$$f\ :\ (x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$f(0,t)$





$f(x,y) \xrightarrow[x\to 0]{}$

$f(0,t) = -1 \xrightarrow[t\to 0]{} -1 \neq f(0,0)$

donc f non continue en $(0,0)$

$$\cancel{f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \underset{r\to 0}{\not\longrightarrow} 0}$$

à θ fixé $\quad f(r\cos\theta, r\sin\theta) \underset{r\to 0}{\longrightarrow}$

$\longrightarrow$ chemin rectiligne d'angle polaire θ.

Exemple. Étudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction :

$$g \,:\, (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(0,t) = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$g(t,0) = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$g(t,t) = \frac{1}{2} \underset{t\to 0}{\not\longrightarrow} 0$$

donc g non continue en $(0,0)$

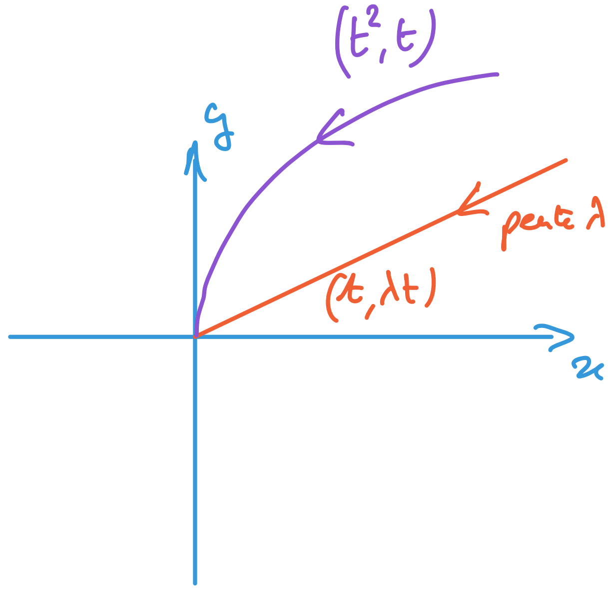
Rmq : $\cancel{g(r\cos\theta, r\sin\theta) =} \cos\theta \sin\theta$

Exemple. Étudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction :

$$h \,:\, (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$h(0,t) = 0 \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

$$h(t,0) = 0 \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$



$$h(t,\lambda t) = \frac{\lambda^2 t^3}{t^2+\lambda^4 t^4}$$

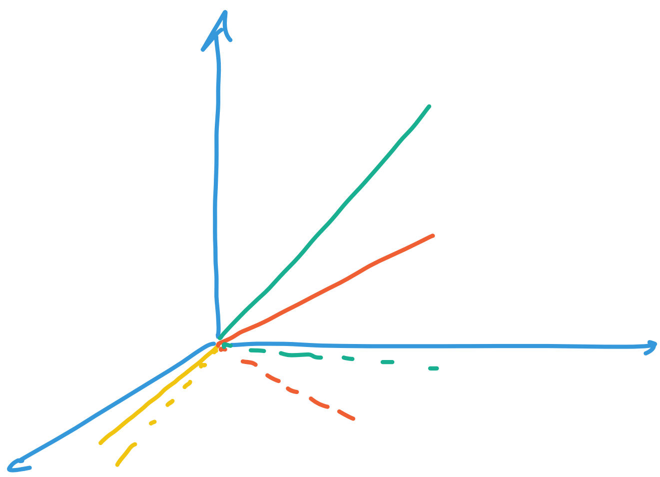
$$\underset{t \to 0}{\sim} \lambda^2 t$$

$$\xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

$$h(t^2,t) = \frac{t^4}{2t^4}$$

$$= \frac{1}{2} \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{1}{2}$$

donc h non continue en $(0,0)$



2.3 Montrer la continuité en un point particulier, prolonger une fonction par continuité

Exemple. Étudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

M1 : $\left| f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0) \right| = \dfrac{r^2 |\cos\theta \sin\theta|}{|r|}$

$\leq |r|$ indep de θ.

$\xrightarrow[r \to 0]{} 0$

M2 : $|f(x,y)| = \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\leq \dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$= \frac{1}{2} \|(x,y)\|_2$

$\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

Exemple. Prolonger par continuité en $(0,0)$ la fonction :

$$g : (x,y) \mapsto xy\ln(x^2+y^2)$$

$$|g(r\cos\theta, r\sin\theta)| = |r^2\cos\theta\sin\theta\ln(r^2)|$$

$$\leq 2r^2 \ln r$$

$$\xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

donc $g(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

On prolonge g par continuité en $(0,0)$ en posant

$g(0,0) = 0$.

Exemple. Montrer que la fonction :

$$k\ :\ (x,y)\mapsto \frac{x^5}{\operatorname{Arctan}(x^4+y^4)}$$

se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

$$\left|k(r\cos\theta, r\sin\theta)\right| = \left|\frac{r^5\cos^5\theta}{\operatorname{Arctan}\left(r^4\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)\right)}\right|$$

$$\cancel{\underset{r\to 0}{\sim}\ \frac{r^5\cos^5\theta}{r^4\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)}}\ \longrightarrow 0$$

$$\leq \frac{r^5}{\operatorname{Arctan}\left(r^4\left|\cos^4\theta+\sin^4\theta\right|\right)}$$

par imparité.

$\exists m>0$ tq $\left|\cos^4\theta+\sin^4\theta\right|\geq m\quad \forall\theta\in\mathbb{R}$

$\theta\longmapsto\cos^4\theta+\sin^4\theta$ continue sur $\mathbb{R}$

et sur $[0,2\pi]$ compact donc minorée

et atteint son minimum : $\exists\theta_0\in[0,2\pi]$ tq

$\forall\theta\in[0,2\pi]\quad \cos^4\theta+\sin^4\theta\geq\underbrace{\cos^4\theta_0+\sin^4\theta_0}_{m}$ >0

par 2π-périodicité $\forall\theta\in\mathbb{R}\quad\cos^4\theta+\sin^4\theta\geq m$

Et donc : $\left|k(r\cos\theta, r\sin\theta)\right| \leq \dfrac{r^5}{\underbrace{\operatorname{Arctan}(r^4 m)}_{\text{indép de } \theta}}$

$$\underset{r\to 0}{\sim} \frac{r}{m} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

CCL : $k(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

On peut prolonger k par continuité en $(0,0)$

en posant $k(0,0) = 0$.

3 Continuité sous le signe $\int$

Théorème.

Soit $h : X \times I \to \mathbb{K}$, où $X \subset E$ est une partie d'un espace normé de dimension finie.
Si :

- Pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est **continue** sur X ;
- Pour tout $x \in X$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- h satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que :

$$|h(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \forall (x,t) \in X \times I$$

où $\varphi(t)$ est intégrable sur I, indépendante de x.

Alors :

- $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur X.

Remarque. *Il s'agit d'une simple adaptation du théorème connu pour la variable réelle au cas d'une variable dans un espace vectoriel normé de dimension finie.*

Adaptation pour domination locale. Soit $h : X \times I \to \mathbb{K}$, où $X \subset E$ est une partie d'un espace normé de dimension finie. Soit $a \in X$.
Si :

- Pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est **continue** sur X ;
- Pour tout $x \in X$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- h satisfait l'**hypothèse de domination locale** : il existe V voisinage relatif de a dans X, et φ telle que :

$$|h(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \forall (x,t) \in V \times I$$

où $\varphi(t)$ est intégrable sur I, indépendante de x.

Alors :

- $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie sur V et continue en a.

4 Suites et séries de fonctions

Rappel des théorèmes.

Les fonctions considérées sont $A \subset E \to F$ où E et F sont des espaces normés de dimension finie.

- Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A ou sur tout compact de A (resp. au voisinage de a) et si les f_n sont continues sur A (resp. en a), alors f est continue sur A (resp. en a).
- Si $\sum f_n$ converge uniformément sur A ou sur tout compact de A (resp. au voisinage de a) et si les f_n sont continues sur A (resp. en a), alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A (resp. en a).

Exemple. Montrer que :

$$f : \quad (x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x + \mathrm{i}y)^n}{(2n)!}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

On note $f_n : (x,y) \longmapsto (-1)^n \dfrac{(x+iy)^n}{(2n)!}$

continue sur $\mathbb{R}^2$ (polynomiale)

$\forall (x,y) \in \overbrace{BF(0,r^2)}^{K}$ pour une euclidienne

$$|f_n(x,y)| = \frac{|x+iy|^n}{(2n)!}$$

$$\leq \frac{r^{2n}}{(2n)!} \quad \text{indep de } (x,y)$$

tg série cv.

Donc $\sum f_n$ cv normalement, donc unif. sur K

Donc f est continue sur tout $K = BF(0,R^2)$

donc sur $\mathbb{R}^2$.