Ma 11 fév TP physique

Ma 18 fév 7^h45-15^h40 B317-B310

Fr MPI / Math MPI*

Math MPI / Ang MPI*

Phy MPI/MPI*

Séries à termes dans un evn de dimension finie

On reprend essentiellement dans ce chapitre la théorie des séries numériques, et on l'adapte aux evn. Dans tout le chapitre, E désigne un espace vectoriel muni d'une norme $\| \cdot \|$.

Souvent, on choisit une norme sous-multiplicative :

$$\|uv\| \leq \|u\| \|v\|$$

1.1 Somme partielle, convergence, divergence, somme, reste d'une série convergente

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On s'intéresse à la **série** $\sum u_n$.

- $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ est la **somme partielle** d'ordre n.
- La série $\sum u_n$ **converge** lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans l'espace vectoriel normé E, c'est-à-dire s'il existe $S \in E$ tel que :
$$\left\| \sum_{k=0}^{n} u_k - S \right\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
On dit qu'elle **diverge** sinon.
- En cas de convergence, on appelle **somme de la série**, et on note $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, la limite de la suite des sommes partielles.

Remarque. *Étudier une série, c'est déterminer si elle converge ou si elle diverge.*

Définition. Lorsque la série $\sum u_n$ converge, on peut définir son **reste** d'ordre n, avec les notations précédentes :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Proposition. La suite des restes est bien définie lorsque $\sum u_n$ converge, et $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

1.2 Divergence grossière

Proposition. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_n$ converge vers 0

Remarque. *Il s'agit d'une condition nécessaire.*

Définition. Lorsque $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

Preuve: $u_n = S_n - S_{n-1}$

$\xrightarrow[n \to +\infty]{} S - S$ par CL de limite

$= 0$

1.3 Opérations

Proposition. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes, λ et μ deux scalaires. Alors la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Corollaire. L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel, et l'application $\sum u_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ y est linéaire.

Lien suite-série. Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans E. On a :

$$\text{la suite } (u_n)_n \text{ converge} \iff \text{la série } \sum(u_{n+1} - u_n) \text{ converge}$$

"télescopique"
Ls sommes partielles.

Proposition. La convergence et la valeur de la somme d'une série convergente est indépendante du choix de la norme sur E qui est de dimension finie.

Preuve : la cv de la suite $(S_n)_n$ et la valeur de la limite est indép du choix de la norme (parce qu'équivalentes)

1.4 Caractérisation par les coordonnées dans une base

Définition. Soit $\sum u_n$ une série à termes dans E, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$u_n = u_n^{(1)} e_1 + \cdots + u_n^{(p)} e_p = \sum_{i=1}^{p} u_n^{(i)} e_i$$

l'unique écriture de u_n comme C.L. de $\mathcal{B}$

La suite $(u_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ s'appelle la i-ème suite coordonnée de $(u_n)_n$.

Proposition. Avec les notations précédentes,

séries dans $\mathbb{K}$

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \forall i \in \{1, \dots, p\},\ \sum u_n^{(i)} \text{ converge}$$

et dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)} \right) e_1 + \cdots + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)} \right) e_p = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(i)} \right) e_i$$

Remarque. *La convergence de $\sum u_n$ est caractérisée par la convergence de ses séries coordonnées dans une base $\mathcal{B}$ fixée.*

1.5 Convergence absolue

Définition. Soit $\sum u_n$ une série à termes dans E. On dit que $\sum u_n$ **converge absolument** si et seulement si la série numérique $\sum \|u_n\|$ converge.

Remarque. *Lorsque $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la norme la valeur absolue ou le module, et on retrouve bien la convergence absolue des séries numériques.*

Remarque. *On ne confondra pas la convergence absolue de $\sum u_n$ dans $(E, \|\cdot\|)$ evn de dimension finie, avec la convergence normale de $\sum f_n$ dans l'espace $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ des fonctions bornées, qui est la convergence de la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$.*

Théorème.

Dans E espace vectoriel normé de dimension finie, si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge.

Preuve. Une justification est proposée en annexe. □

Remarque : $E = \mathbb{R}[X]$

$\|P\| = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ $\qquad P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$

Étudier la série $\sum \frac{1}{2^n} X^n$.

On note $P_n = \frac{1}{2^n} X^n$

cv absolue : $\|P_n\| =$ max des coeff de P_n en val absolue

$= \frac{1}{2^n}$

tg série (géom) convergente

donc $\sum P_n$ cv absolument.

Convergence ?

idée $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} X^n = \frac{1}{1 - \frac{X}{2}} \quad \text{car } \left|\frac{X}{2}\right| < 1 \right)$

$$\mathbb{K}[X] \ni \left(1-\frac{X}{2}\right)\overbrace{\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}X^n}^{S_N}$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}X^n - \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^{n+1}}X^{n+1}$$

$$= 1 - \frac{X^{N+1}}{2^{N+1}}$$

Si $\sum P_n$ cv, on note S sa somme. $S \in \mathbb{K}[X]$

$$\forall N \qquad \left(1-\frac{X}{2}\right)S_N = 1 - \frac{X^{N+1}}{2^{N+1}}$$

$$\left(1-\frac{X}{2}\right)S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \left(1-\frac{X}{2}\right)S \quad \text{(par continuité du produit)}$$

$$1 - \frac{X^{N+1}}{2^{N+1}} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$$

car $\left\|\frac{X^{N+1}}{2^{N+1}}\right\| = \frac{1}{2^{N+1}} \to 0$

donc $\left(1-\frac{X}{2}\right)S = 1$

$\underbrace{\left(1-\frac{X}{2}\right)\ S}_{\text{polynômes}}$; $\underbrace{\text{polynômes}}_{\text{degré} \geq 1}$; $\underbrace{1}_{\text{degré } 0}$

M2 Si $\sum P_n$ converge, de somme $S = b_0 + \dots + b_d X^d$

$$\|S_N - S\| = \left\| \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} X^n - \sum_{n=0}^{d} b_n X^n \right\|$$

$$\Big\downarrow {\scriptstyle N \to +\infty}$$

$$0$$

$$= \left\| \left(\frac{1}{2^0} - b_0\right) + \left(\frac{1}{2^1} - b_1\right) X + \dots + \left(\frac{1}{2^d} - b_d\right) X^d + \frac{1}{2^{d+1}} X^{d+1} + \dots \frac{1}{2^N} X^N \right\|$$

$$\geq \underbrace{\frac{1}{2^{d+1}}}_{\text{cte}} \not\to 0 \qquad \text{dès que } N \geq d+1$$

2 Application : séries de matrices, séries d'endomorphismes

2.1 Exponentielle de matrice, d'endomorphisme en dimension finie

Définition.

- Pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on définit :

$$\exp(A) = \mathrm{e}^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

- Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, on définit :

$$\exp(u) = \mathrm{e}^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} u^n$$

Preuve : montrons la cv absolue de la série.

$\left\| \frac{A^n}{n!} \right\|$ tg série cv ?

On va choisir une norme sous-multiplicative

$$\|AB\|_\infty = \max_{i,j} \left|[AB]_{ij}\right|$$

$$\cancel{= \max_{i,j} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right|} \overset{?}{\leq} \|A\|_\infty \|B\|_\infty$$

$$|||AB||| \leq |||A||| \; |||B|||$$

↳ on peut choisir une norme sous-multiplicative sur un evn de dimension finie.

$$\left\| \frac{A^n}{n!} \right\| = \frac{1}{n!} \|A^n\|$$

récurrence

$$\leq \frac{1}{n!} \|A\|^n$$

hérédité :
$$\|A^{n+1}\| = \|A^n \cdot A\|$$
$$\leq \|A^n\| \cdot \|A\| \quad \text{par sous-multip.}$$
$$\leq \|A\|^n \, \|A\| \quad \text{par HR}$$
$$= \|A\|^{n+1}$$

initialisation
$$\cancel{\|A^0\| = \|I_n\| = \text{fait}}$$
$$\cancel{1 = \|A\|^0}$$
$$\|A^1\| = \|A\|^1$$

$\forall n \geq 1$ $\quad \left\| \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \frac{1}{n!} \|A\|^n$ par récurrence

t.g. série cv
(la série exp numérique)

Comme $M_p(\mathbb{K})$ est de dim finie, donc
$\sum \frac{A^n}{n!}$ converge.

2.2 Exemples

Proposition. Si $D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_p \end{pmatrix}$ est diagonale, alors $\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{a_p} \end{pmatrix}$.

$$\exp(D) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D^n}{n!} \quad \text{où} \quad D^n = \begin{pmatrix} a_1^n & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_p^n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} a_1^n & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_p^n \end{pmatrix}$$

Somme par coord. dans la base canonique

$$= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} a_1^n & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} a_p^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{a_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{a_p} \end{pmatrix}$$

Proposition. Si $T = \begin{pmatrix} a_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_p \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure, alors $\exp(T)$ est de la forme :

$$\exp(T) = \begin{pmatrix} e^{a_1} & * & \cdots & * \\ 0 & e^{a_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & e^{a_p} \end{pmatrix}$$

Preuve:

On note $\mathcal{T}_p^S(\mathbb{K})$ l'ens. des matrices triangulaires sup.

c'est un sous-ev de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ de dim finie donc c'est un fermé.

Il est stable par produit.

$\forall N \quad \sum_{n=0}^{N} \frac{T^n}{n!} \in \mathcal{T}_p^S(\mathbb{K})$

car CL d'éléments de $\mathcal{T}_p^S(\mathbb{K})$

cette suite des sommes partielles converge vers $\exp(T)$

or $\mathcal{T}_p^S(\mathbb{K})$ est fermé donc $\exp(T) \in \mathcal{T}_p^S(\mathbb{K})$

De plus : par récu $T^n = \begin{pmatrix} a_1^n & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & a_p^n \end{pmatrix}$

donc $\exp(T) = \begin{pmatrix} e^{a_1} & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{a_p} \end{pmatrix}$

Proposition. Si $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $\exp(N) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} N^k$.

on sait que $N^p = 0 \quad \forall n \geq p \quad N^n = 0$

2.3 Propriétés

Proposition. Soit $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ deux matrices semblables, et $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Alors :

$$\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}$$

$\forall N \in \mathbb{N}$ $$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} (PBP^{-1})^n$$

rec.

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} P B^n P^{-1}$$

bilinéarité du produit

$$= P\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} B^n\right) P^{-1}$$

À la limite pour $N \to +\infty$, avec la continuité de $M \longmapsto PMP^{-1}$ linéaire sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ de dim finie.

d'où $\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}$

Corollaire. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Alors $\mathrm{Sp}(\exp(A)) = \{\mathrm{e}^{\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

Preuve: $A = PTP^{-1}$ car $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$

où $T = \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_p \end{pmatrix}$

donc $\exp(A)$ semblable à $\exp(T) = \begin{pmatrix} e^{a_1} & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{a_p} \end{pmatrix}$

donc $\mathrm{Sp}(\exp(A)) = \{e^{a_1} \dots e^{a_p}\}$

Proposition.

- L'application exp $\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est continue.
- Pour E evn de dimension finie, exp $\mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ est continue.

(admis pour l'instant)

Proposition. Soit $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, telles que $AB = BA$.

- $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$
- $\exp(A)$ est inversible et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Proposition. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ où E est un evn de dimension finie, tels que $u \circ v = v \circ u$.

- $\exp(u+v) = \exp(u) \circ \exp(v) = \exp(v) \circ \exp(u)$
- $\exp(u)$ est inversible et $\exp(u)^{-1} = \exp(-u)$.

$$\frac{1}{n!}(A+B)^n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

par le binôme, $AB = BA$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k \cdot \frac{1}{(n-k)!} B^{n-k}$$

tg du produit de Cauchy de $\sum \frac{A^k}{k!}$ et $\sum \frac{B^k}{k!}$ qui convergent absolument.

donc
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(A+B)^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} B^n\right)$$

ie
$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$$
$$\exp(B+A) = \exp(B)\exp(A)$$

Remarque. *En pratique, pour calculer $\exp(A)$ lorsque A est quelconque, on décompose A sous la forme $A = D + N$ où D est diagonalisable, N nilpotente et $ND = DN$. Ce résultat n'étant pas au programme, on se laisse guider par l'énoncer.*

Déterminer les $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tq

$$\sin(A) = \begin{pmatrix} 1 & 42 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

défini par $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$

(a) Mque $\sin(A)$ existe et commute avec A

(b) Analyse:
- mque A est triangulaire supérieure
- mque A n'est pas diagonalisable
- [...]