Dérivation, intégration des fonctions vectorielles de variable réelle

Tous les espaces vectoriels normés envisagés dans ce chapitre sont de dimension finie.
On s'intéresse dans ce chapitre à des fonctions :

$$f : \begin{array}{ccc} \overset{\subset \mathbb{R}}{I} & \to & \overrightarrow{F} \\ t & \mapsto & f(t) \end{array}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et F un espace normé de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Remarque. *Pour les fonctions à valeurs vectorielles, il n'y a pas de théorème de Rolle, pas de quotient etc.*

Remarque. *Dans le cadre de notre programme, on ne dérive que les fonctions de variable réelle, et pas les fonctions de variable complexe.*

1 Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

1.1 Dérivabilité et dérivée des fonctions à valeurs vectorielles

Définition. Soit $a \in I$. On dit que f **est dérivable en** a lorsque la fonction :

$$t \mapsto \frac{1}{h}\left(\overrightarrow{f(a+h)} - \overrightarrow{f(a)}\right)$$

admet une $\overrightarrow{\text{limite}}$ en 0. On note alors $\overrightarrow{f'(a)}$ cette limite.

Remarque. *$f'(a)$ est un élément de F, un vecteur.*

$$\cancel{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

$$\frac{1}{h} \cdot \left(f(a+h) - f(a) \right)$$

Proposition. f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\ell \in F$ tel que, au voisinage de $h \to 0$:

$$\overrightarrow{f(a+h)} = \overrightarrow{f(a)} + h\vec{\ell} + \overrightarrow{o(h)}$$

Remarque. *On a aussi :*

$$\begin{aligned} f'(a) = \ell &\iff \frac{1}{t-a}\big(f(t) - f(a)\big) \xrightarrow[t\to a]{} \ell \\ &\iff f(t) = f(a) + (t-a)\ell + \underset{t\to a}{o}(t-a) \end{aligned}$$

où $\overrightarrow{o(h)} = h\,\overrightarrow{\varepsilon(h)}$ où $\overrightarrow{\varepsilon(h)} \xrightarrow[h\to 0]{} \vec{0}$

ie $\|\varepsilon(h)\|_F \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

Définition. f est **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, on définit la **fonction dérivée** :

$$f' : \begin{array}{ccc} I & \to & F \\ t & \mapsto & f'(t) \end{array}$$

On dit que f est $\mathcal{C}^1$ lorsque f est dérivable, et que f' est continue.

Remarque. *On peut définir, lorsqu'elles existent, les dérivées à gauche et à droite en a.*

1.2 Interprétation cinématique

En cinématique, on étudie le mouvement d'un point mobile :

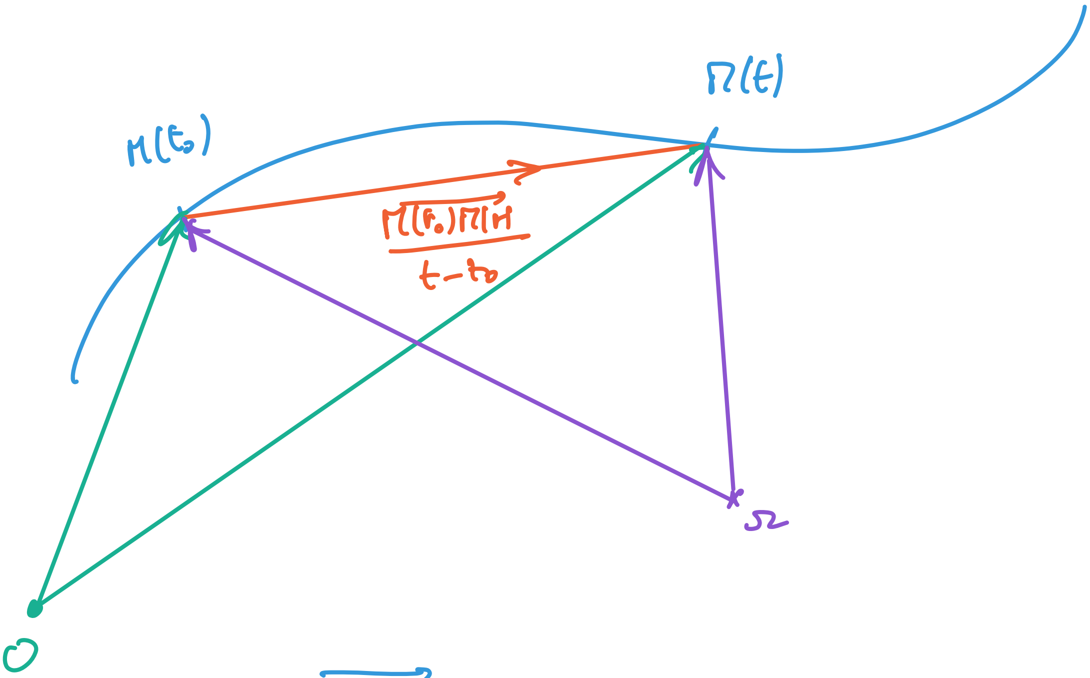
$$t \mapsto M(t)$$

$$\vec{v} = \frac{dM}{dt}$$

où la variable t désigne le temps. Fixant une origine à l'espace affine, cela revient à étudier la fonction à valeurs vectorielles :

$$f \,:\, t \mapsto \overrightarrow{OM(t)}$$

On écrit alors, en général, $M'(t)$ pour $f'(t)$ ou encore $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t}$, quantité qui ne dépend pas du choix de l'origine de l'espace affine, et qui représente le **vecteur vitesse** à l'instant t.



$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = M(t) - M(t_0)$$

$$= \overrightarrow{OM}(t) - \overrightarrow{OM}(t_0)$$

$$= \overrightarrow{\Omega M}(t) - \overrightarrow{\Omega M}(t_0)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM}(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}(t)\right)$$

$$= 0 + \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\Omega M}(t)\right)$$

indép du choix de l'origine O ou Ω.

$\frac{dM}{dt}$ est la vitesse.

1.3 Opérations sur les dérivées

1.3.1 Combinaison linéaire

Proposition. Soit f, g deux fonctions $I \subset \mathbb{R} \to F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si f et g sont dérivables en $a \in E$, alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et :

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$$

Proposition. Soit f, g deux fonctions $I \subset \mathbb{R} \to F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $\lambda f + \mu g$ est $\mathcal{C}^1$ sur I.

1.3.2 Image par une application linéaire

Proposition. Soit ~~G~~ F un espace normé de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(F, G)$, et $f : I \subset \mathbb{R} \to F$ une fonction dérivable en $a \in I$.
Alors $u \circ f : t \mapsto u(f(t))$ est dérivable en a et :

$$(u \circ f)'(a) = u\big(f'(a)\big)$$

Remarque. *Ici, f n'est pas une fonction de la variable réelle, donc on n'applique pas la formule usuelle. Ça n'a pas de sens de parler de la « dérivée de u ».*

Proposition. Avec les notations précédentes, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $u \circ f$ l'est aussi.

$$\begin{array}{ccccc} I \subset \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow[\text{linéaire}]{u} & G \\ t & \longmapsto & f(t) & \longmapsto & u(f(t)) \end{array}$$

si f dérivable en a

alors $u \circ f$ aussi et $(u \circ f)'(a) = u \circ f'(a)$

Preuve:

$$\frac{1}{h}\Big(u\circ f(a+h) - u\circ f(a)\Big) = \frac{1}{h}\Big(u\big(f(a+h) - f(a)\big)\Big)$$

$$= u\left(\frac{1}{h}\big(f(a+h) - f(a)\big)\right) \quad \text{car } u \text{ linéaire}$$

$$\xrightarrow[h \to 0]{} u\big(f'(a)\big)$$

car f dérivable en a

et u continue en $f'(a)$ car linéaire

sur F evn de dimension finie.

Exemple. Soit $A : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $t \mapsto A(t)$ une application dérivable sur I. Montrer que $t \mapsto \operatorname{tr}\big(A(t)\big)$ est dérivable sur I, et exprimer sa dérivée à l'aide de A'.

M1 : tr est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dim finie,

A dérivable

donc $\operatorname{tr} \circ A$ est dérivable et

$$(\operatorname{tr} \circ A)'(t) = \operatorname{tr}(A'(t))$$

M2 : On note $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j}$

a_{ij} sont les fct coordonnées de A.

$$\operatorname{tr}(A(t)) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)$$

dérivable, de dérivée $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}'(t) = \operatorname{tr}(A'(t))$

Exemple. Soit $\begin{array}{rccc} x : & I \subset \mathbb{R} & \to & E \\ & t & \mapsto & x(t) \end{array}$ une application dérivable sur I. Pour $a \in E$, montrer que l'application $t \mapsto \langle a, x(t) \rangle$ est dérivable sur I est exprimer sa dérivée à l'aide de x'.

a fixé, $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \langle a, x \rangle \end{array}$ forme linéaire

donc $t \longmapsto \langle a, x(t) \rangle$ est dérivable

de dérivée $\varphi(x'(t)) = \langle a, x'(t) \rangle$

1.3.3 Bilinéarité, dérivée d'un produit

Proposition. Soit E, F, G trois espace normés de dimensions finies, I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $B : E \times F \to G$ est bilinéaire, $f : I \to E$ et $g : I \to F$ sont dérivables en a, alors :

$$\begin{array}{rccl} B(f,g) : & I & \to & G \\ & t & \mapsto & B\big(f(t), g(t)\big) \end{array}$$

est dérivable en a et :

$$\big(B(f,g)\big)'(a) = B\big(f'(a), g(a)\big) + B\big(f(a), g'(a)\big)$$

Proposition. Avec les mêmes notations, si f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $B(f,g)$ l'est aussi.

Rmq : avec $E, F, G = \mathbb{R}$ et B le produit qui est bilinéaire,

on retrouve la formule $(fg)' = f'g + fg'$

Preuve : par les DL. Au vois. de $h \to 0$

f dérivable en a donc $f(a+h) = f(a) + h f'(a) + o(h)$

g ——— donc $g(a+h) = g(a) + h g'(a) + o(h)$

$$B(f,g)(a+h) = B\big(f(a+h), g(a+h)\big)$$

$$= B\big(f(a) + h f'(a) + h\,\varepsilon_1(h),\ g(a) + h g'(a) + h\,\varepsilon_2(h)\big)$$

↓ par bilinéarité

$$= \boxed{B(f(a), g(a))}$$

$$+ h \boxed{\big(B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))\big)}$$

$$+ \boxed{\begin{array}{l} h^2 B(f'(a), g'(a)) + h^2 B(f'(a), \varepsilon_2(h)) \\ + h^2 B(\varepsilon_1(h), g'(a)) + h^2 B(\varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h)) \\ + h B(\varepsilon_1(h), g(a)) + h B(f(a), \varepsilon_2(h)) \end{array}}$$

$o(h)$?

$$h^2 B(f'(a), g'(a)) = h \,.\, h B(f'(a), g'(a))$$
$$= h \; o(1)$$

$$\| h B(\varepsilon_1(h), g(a)) \| = |h| \; \| B(\varepsilon_1(h), g(a)) \|$$
$$\leq |h| \; C \; \| \varepsilon_1(h) \| \; \| g(a) \|$$

car B bilinéaire sur $E \times F$ de dim finie

$$= |h| \; o(1)$$

de même, les autres termes restants sont $o(h)$

$$B(f,g)(a+h) = B(f,g)(a)$$
$$+ h \big(B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a)) \big)$$
$$+ o(h)$$

Exemple. Soit $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto B(t)$ deux applications $\mathcal{C}^1$ sur I intervalle, à valeurs dans $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{qr}(\mathbb{K})$ respectivement. Montrer que $t \mapsto A(t)B(t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur I, et donner l'expression de sa dérivée.

$$\Pi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{qr}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{pr}(\mathbb{K}) \\ (M, N) & \longmapsto & MN \end{array} \quad \text{bilinéaire}$$

donc $\Pi(A, B) : t \longmapsto A(t)B(t)$ dérivable, $\mathcal{C}^1$

et $(\Pi(A,B))'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$

Exemple. Soit $t \mapsto A(t)$ une application $\mathcal{C}^1$ sur I intervalle, à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $f : t \mapsto (A(t))^2$ est $\mathcal{C}^1$ sur I, et donner l'expression de sa dérivée.

$$f : t \longmapsto (A(t), A(t)) \xmapsto{\ \Pi\ } (A(t))^2$$

$$f'(t) = A'(t)A(t) + A(t)A'(t)$$

Exemple. Soit F un espace euclidien, $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto g(t)$ deux applications $\mathcal{C}^1$ sur I intervalle, à valeurs dans F. Montrer que $t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle$ et $t \mapsto \|f(t)\|^2$ sont $\mathcal{C}^1$ sur I, et donner l'expression de leurs dérivées.

- $\langle . , . \rangle$ est bilinéaire

donc $\langle f, g \rangle$ est $\mathcal{C}^1$ et

$$\langle f, g \rangle'(t) = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle$$

- $\varphi : t \longmapsto (f(t), f(t)) \longmapsto \langle f(t), f(t) \rangle$

$$\varphi'(t) = \langle f'(t), f(t) \rangle + \langle f(t), f'(t) \rangle$$
$$= 2 \langle f'(t), f(t) \rangle$$

par symétrie du prod. scalaire.

1.3.4 Multilinéarité

Proposition. Soit $F_1, F_2, \dots, F_p, G$ des espace normés de dimensions finies, I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $M : F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p \to G$ est mutlilinéaire et que les $f_i : I \to F_i$ sont dérivables en a, alors :

$$\begin{array}{rccl} M(f_1, f_2, \dots, f_p) : & I & \to & G \\ & t & \mapsto & M\big(f_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t)\big) \end{array}$$

est dérivable en a et :

$$\big(M(f_1, f_2, \dots, f_p)\big)'(a) = M\big(f_1'(a), f_2(a), \dots, f_p(a)\big) + M\big(f_1(a), f_2'(a), \dots, f_p(a)\big) + \cdots + M\big(f_1(a), f_2(a), \dots, f_p'(a)\big)$$

Exemple:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X]^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}_{3n}[X] \\ (P, Q, R) & \longmapsto & PQR \end{array}$$

est trilinéaire.

Exemple: $\det_{\mathcal{B}} : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$

est n-linéaire

$\det : \cancel{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\ \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})^n \longrightarrow \mathbb{K}$

est n-linéaire par rapport aux colonnes.

1.3.5 Dérivation d'une fonction composée

Proposition. Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to F$. On suppose :

- $\varphi(I) \subset J$
- φ dérivable en a
- g dérivable en $\varphi(a)$

Alors $g \circ \varphi$ est dérivable en a et :

$$(g \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a)\, g'\big(\varphi(a)\big)$$

Proposition. Avec les notations précédentes, si g est $\mathcal{C}^1$ sur J et φ est $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $g \circ \varphi$ est $\mathcal{C}^1$ sur I.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend left, "f = g\circ\varphi"] & J \arrow[r, "g"] & E \\
t \arrow[r, mapsto] & u \arrow[r, mapsto] & \overrightarrow{g(u)} \\
t \in \mathbb{R} & u \in \mathbb{R} & \overrightarrow{g(u)} \in E
\end{tikzcd}$$

$$\overrightarrow{(g\circ\varphi)'(a)} = \overrightarrow{g'(\varphi(a))}\ \underbrace{\varphi'(a)}_{\in \mathbb{K}} \quad \text{maladroit}$$

1.3.6 Caractérisation par les fontions coordonnées

Proposition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F, et f_i les applications coordonnées de $f : I \to F$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors f est dérivable en a si et seulement si chaque f_i l'est. Dans ce cas :

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a) e_i$$

Proposition. Avec les notations précédentes, f est $\mathcal{C}^1$ si et seulement si chaque f_i l'est.

Exemple. Justifier que $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.

preuve :

$\boxed{\Rightarrow}$ On note $\pi_i : F \longrightarrow \mathbb{K}$

$x \longmapsto x_i$ la i^e coord de x dans $\mathcal{B}$

On sait que π_i est linéaire

donc $f_i = \pi_i \circ f$ est dérivable

et $f_i' = \pi_i \circ f'$

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

les 4 fct coordonnées dans la base canonique sont dérivables donc M l'est

$$\text{et } M'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}$$

$$= M\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

1.3.7 Caractérisation des fonctions constantes

Théorème.

Soit $f : I \to F$ une fonction continue sur I, dérivable sur l'intérieur $\mathring{I}$ de I. Alors f est constante si et seulement si sa dérivée est nulle sur $\mathring{I}$.

$$\overset{\circ}{\widehat{[a, b]}} =]a, b[$$

preuve : par les applications coordonnées

1.4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition. On a déjà défini le fait que f soit de classe $\mathcal{C}^1$: elle est dérivable et sa dérivée est continue. On définit la classe $\mathcal{C}^k$ par récurrence : f est $\mathcal{C}^{k+1}$ si $f^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

On note $f^{(k)}$ ou $\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ lorsqu'elle est $\mathcal{C}^k$ pour tout k.

Proposition. Si f, g sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans F, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et :

$$(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$$

$\mathcal{C}^k(I, F)$ est un espace vectoriel.

Formule de Leibniz

Proposition. Si f, g sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans F et G respectivement, $B : E \times F \to G$ est bilinéaire, alors $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et :

$$\big(B(f,g)\big)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B\big(f^{(i)}, g^{(k-i)}\big)$$

Proposition. Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans F, φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi(J) \subset I$, alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J et :

$$\forall t \in J,\ (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t)\, f'\big(\varphi(t)\big)$$

Proposition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F, et f_i les applications coordonnées de $f : I \to F$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors f est $\mathcal{C}^k$ sur I si et seulement si chaque f_i l'est. Dans ce cas :

$$\forall t \in I,\ f^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(k)}(t) e_i$$

1.5 Limite de la dérivée, classe $\mathcal{C}^k$ par prolongement

Théorème.

Soit $f : I \to F$ et $a \in I$. Si

- f est continue sur I (en particulier en a)
- f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$
- $f'(t) \xrightarrow[t \to a]{} \ell$

alors f est dérivable en a, et $f'(a) = \ell$ (et donc f' est continue en a). f $\mathcal{C}^1$.

Théorème.

Soit $f : I \setminus \{a\} \to F$. Si

- f est $\mathcal{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$
- f, f', ..., $f^{(k)}$ admettent en a une limite ℓ, ℓ_1, ..., ℓ_k respectivement.

alors f se prolonge en a de façon $\mathcal{C}^k$ en posant $f(a) = \ell$, alors $f^{(i)}(a) = \ell_i$ pour tout i.

2 Intégration des fonctions à valeurs vectorielles

2.1 Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

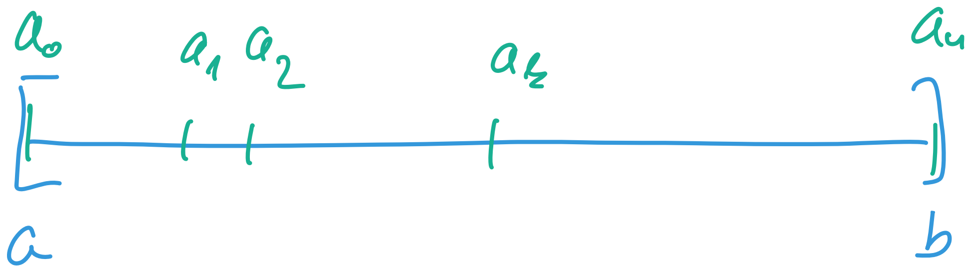
Définition. Soit $f : I = [a, b] \to F$. On dit que f est **en escalier** lorsqu'il existe une subdivdision $(a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$, f est constante, et on note v_i cette constante.
Avec les notations précédente, pour f en escalier, on définit l'**intégrale de f sur** $[a, b]$ par :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{i-1} (a_{i+1} - a_i) v_i$$

"aire des rectangles".

qui ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée à f.

$a = a_0 < a_1 - - < a_n = b$



Propriétés.

2.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Rappel. Toute fonction continue par morceaux sur un segment, à valeurs dans un espace normé de dimension finie, est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

Preuve. Dans une base donnée, on approche chaque fonction coordonnée. □

f cpm sur $[a,b]$, $\exists (g_n)_n$ en escalier tq

$$g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{C.U} f$$

ie $\displaystyle\sup_{t\in[a,b]} \|g_n(t)-f(t)\|_F \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

on pose $\displaystyle N_\infty(g_n-f) = \sup_{t\in[a,b]} \|g_n(t)-f(t)\|_F$

Définition. Soit $f : [a,b] \to F$ une fonction continue par morceaux, et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors $\left(\int_a^b g_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et sa limite est indépendante du choix de la suite $(g_n)_n$. On appelle **intégrale de f sur $[a,b]$** cette limite commune.

Proposition. Relation de Chasles.

Proposition. Si f et g sont continues par morceaux sur $[a,b]$, $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, alors $\lambda f+\mu g$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ et :

$$\int_a^b (\lambda f+\mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

passer à la limite sur les prop des fct en escalier

Proposition. Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs dans F, et $u \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $u \circ f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ et :

$$\int_a^b u \circ f(t)\,\mathrm{d}t = u\Big(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big)$$

Preuve: Soit $(g_n)_n$ suite de fct en escalier qui cv uniformément vers f sur $[a,b]$.

- Soit $(a_0 \dots a_p)$ subd. adaptée à g_n.

$$g_n|_{]a_i,a_{i+1}[} = v_i$$

donc
$$\overrightarrow{\int_a^b g_n(t)\,dt} = \sum_{i=0}^{p-1} (a_{i+1} - a_i)\,\vec{v_i}$$

donc
$$u\Big(\int_a^b g_n(t)\,dt\Big) = u\Big(\sum_{i=0}^{p-1} (a_{i+1} - a_i)\,v_i\Big)$$

$$= \sum_{i=0}^{p-1} (a_{i+1} - a_i)\,\underbrace{u(v_i)}_{\text{c'est } u\circ g_n|_{]a_i,a_{i+1}[}} \quad \text{par linéarité.}$$

$$= \int_a^b u \circ g_n(t)\,dt$$

- on veut passer à la limite.

$$u\left(\int_a^b g_n(t)\,dt\right) = \int_a^b u\circ g_n(t)\,dt$$

$$\Big\downarrow_{n\to+\infty}$$

$$u\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)$$ car $\int_a^b g_n(t) \longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt$

et u continue car

linéaire sur F de dim finie

$\forall t\in[a,b]$ $\| u\circ g_n(t) - u\circ f(t)\|_G$

$= \| u(g_n(t) - f(t))\|_G$ u linéaire

$\leqslant |||u|||\ \|g_n(t) - f(t)\|_F$

$\leqslant |||u|||\ N_\infty(g_n - f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

indép de t

donc $(u\circ g_n)_n$ cv unif vers $(u\circ f)$

donc, sur le segment $[a,b]$

$$\int_a^b u\circ g_n(t)\,dt \longrightarrow \int_a^b u\circ f(t)\,dt.$$

Proposition. Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs dans F. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F et f_i les applications coordonnées de f. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \Big(\int_I f_i(t)\,\mathrm{d}t \Big) e_i$$

C'est-à-dire que les coordonnées de l'intégrale sont les intégrales des fonctions coordonnées.

Exemple. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} A(t)\,\mathrm{d}t$ où $A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$

On note $a_{ij} : t \mapsto a_{ij}(t)$ les appl. coordonnées de A dans la base canonique.

$$\int_0^{\pi/2} A(t)\,dt = \begin{pmatrix} \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt & \int_0^{\pi/2} -\sin t\,dt \\ \int_0^{\pi/2} \sin t\,dt & \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition. Soit $f : [a, b] \to F$ continue par morceaux et $\|\cdot\|$ une norme sur F. Lorsque $a \leqslant b$:

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Preuve: Soit $(g_n)_n$ suite de fct en escalier qui cv uniformément vers f sur $[a,b]$.

Soit $(a_0 \dots a_p)$ subd. de $[a,b]$ pour g_n

$$v_i = g_n|_{]a_i, a_{i+1}[}$$

$$\left\| \int_a^b g_n(t)\,dt \right\|_F = \left\| \sum_{i=0}^{p-1} (a_{i+1} - a_i)\, v_i \right\|_F$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{p-1} (a_{i+1} - a_i)\, \|v_i\|_F$$

$$= \sum_{i=0}^{p-1} (a_{i+1} - a_i)\, \| g|_{]a_i, a_{i+1}[} \|$$

$$= \int_a^b \|g_n\|(t)\,dt$$

Puis passage à la limite [...] comme ci-avant.

Proposition. Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs dans F. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues par morceaux, qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f continue par morceaux. Alors :

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\left\| \int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \right\|$$

$$\leq \ldots$$

2.3 Sommes de Riemann

Proposition. Soit f continue par morceaux sur $[0,1]$. Alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition. Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a+k\frac{b-a}{n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

2.4 Primitives

Définition. On appelle **primitive** de $f : I \to F$ toute fonction $F : I \to F$ dérivable telle que $F' = f$.

Théorème.

Soit $f : I \to F$ et $a \in I$. Si f est continue sur I, alors f possède une unique primitive qui s'annule en a, et c'est :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

dérivabilité de F en x...

2.5 Accroissements finis, formules de Taylor

Inégalité des accroissaments finis.

Soit $f : I \to F$ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur I et $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall t \in]a, b[, \ \|f'(t)\| \leqslant M$$

Alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M|b - a|$$

Preuve: $\|f(b) - f(a)\|$

$$= \left\| \int_a^b f'(t)\, dt \right\| \quad \text{car } f \ \mathcal{C}^1$$

$$\leq \int_a^b \|f'(t)\|\, dt \quad \text{où } a < b$$

$$\leq \int_a^b M\, dt$$

$$= M(b-a)$$

Formule de Taylor avec reste intégral.

Soit $f : I \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors pour tout $a, x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

ou encore, pour tout $a \in I$ et h tel que $a + h \in I$:

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_0^h \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+t)\,\mathrm{d}t$$

Inégalité de Taylor-Lagrange.

Soit $f : I \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, telle que $f^{(n+1)}$ bornée sur I. Alors pour tout $a, x \in I$:

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty^I$$

ou encore, pour tout $a \in I$ et h tel que $a + h \in I$:

$$\left\| f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty^I$$

Formule de Taylor-Young.

Soit $f : I \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$, alors pour tout $a \in I$, au voisinage de $h \to 0$:

$$\overrightarrow{f(a+h)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} \overrightarrow{f^{(k)}(a)} + h^n \overrightarrow{\varepsilon(h)}$$

où $\overrightarrow{\varepsilon(h)} \xrightarrow[h \to 0]{} \overrightarrow{0_E}$.
On note $\mathrm{o}(h^n)$ pour désigner la fonction vectorielle $h \mapsto h^n \varepsilon(h)$.

47,5