Pour ve : 46.2 , 46.3 , 46.7

extractrice , val d'adhérence d'une suite

X compact ssi toute suite de X admet une val d'adh dans X

ssi de toute suite de X on peut extraire une suite cv dans X.

X fermé borné.

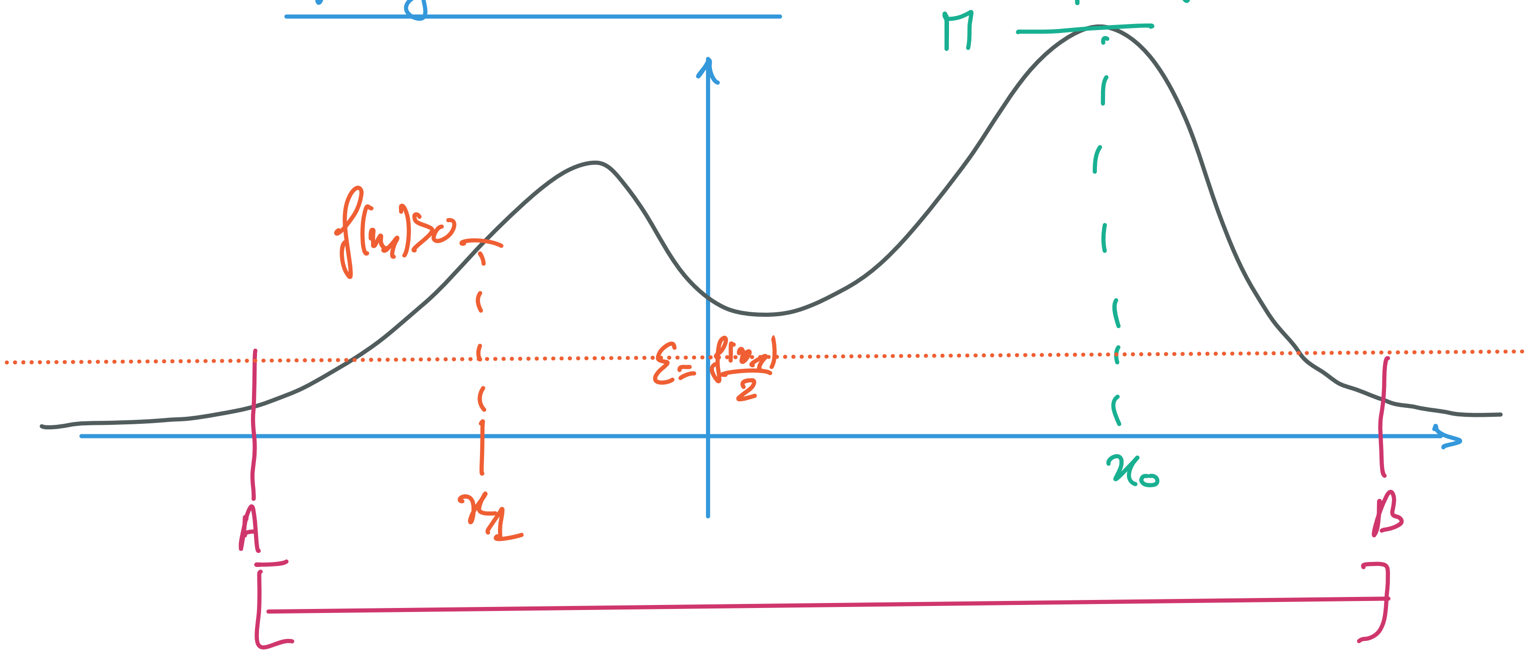
Si f continue sur X compact, f(X) compact.

Th des bornes atteintes → existence d'un max.

Mque $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue de limite nulle en $\pm\infty$
positive

Mque f admet un max

On suppose $f \neq 0$



$\exists x_1$ tq $f(x_1) > 0$

- On applique la déf de $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ avec $\varepsilon = \frac{f(x_1)}{2}$

$\exists B > 0$ tq $\forall x \geq B \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{f(x_1)}{2}$

De m. $\exists A<0$ tq $\forall x \leq A$, $0 \leq f(x) \leq \frac{f(x_1)}{2}$

- f continue sur $[A,B]$ compact, donc admet un max :

$\exists x_0 \in [A,B]$ tq $\forall x \in [A,B]$ $f(x) \leq f(x_0)$

- $f(x_1) > \varepsilon$ donc $x_1 \in [A,B]$

et donc $f(x_1) \leq f(x_0)$

- $\forall x \in]-\infty, A[\cup]B,+\infty[$, $f(x) \leq \frac{f(x_1)}{2} \leq f(x_0)$

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

4.1 Exemples : compacts de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$

Théorème de Bolzano-Weierstrass.

De toute suite bornée de réels ou de complexes on peut extraire une suite convergente.

Remarque. *Ce théorème, démontré en première année par dichotomie, peut s'exprimer maintenant en disant que toute suite bornée de réels ou de complexes admet au moins une valeur d'adhérence.*

Corollaire. Les compacts de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{C}$) sont les parties fermées et bornées de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{C}$).

Remarque.

- *Les segments sont des compacts de $\mathbb{R}$, ce sont les intervalles compacts. Mais il y a beaucoup de compacts qui ne sont pas des intervalles.*
- *Tout compact X de $\mathbb{R}$ est fermé et borné, donc inclus dans $[\mathrm{Inf}(X), \mathrm{Sup}(X)] = [\mathrm{Min}(X), \mathrm{Max}(X)]$. C'est pour cela que, sur $\mathbb{R}$, les expressions « sur tout compact » ou « sur tout segment » ont le même sens.*

$(u_n)_n$ suite bornée : $\exists M$ tq $\forall n$ $u_n \in \underbrace{[-M, M]}_{\text{compact}}$

donc par déf, il existe une suite extraite convergente

dans $[-M, M]$ par déf de compacité.

4.2 Équivalence des normes en dimension finie

Théorème.

Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Preuve:

E ev normé de dim finie.

Soit $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ base de E.

Soit N_∞ où $N_\infty(x) = \max_{i=1}^{n} (|x_i|)$ $\quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

N autre norme de E

Mq N_∞ et N sont équivalentes. $\alpha N_\infty \leq N \leq \beta N_\infty$

- Soit $x \in E$, $\quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$$N(x) = N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} N(x_i e_i) \qquad \text{inég triangulaire}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, N(e_i) \qquad \text{homogénéité}$$

$$\leq N_\infty(x) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} N(e_i)}_{\beta}$$

où $\beta \neq 0$ car les e_i sont $\neq 0$

- On cherche $\alpha_{>0}$ tq $\forall x \in E \quad \alpha N_\infty(x) \leq N(x)$

ie α tq $\forall x \neq 0 \quad \alpha \leq \frac{1}{N_\infty(x)} N(x)$

c'est une question d'existence de minorant >0

α ? tq $\quad \alpha \leq N\left(\frac{x}{N_\infty(x)}\right)$

On cherche à minorer par $\alpha > 0$

$N(y)$

pour $y \in S_{N_\infty}(0,1)$

- $y \longmapsto N(y)$ continue car lipschitzienne.

[...]

- $S_{N_\infty}(0,1)$ est fermée

car c'est $N_\infty^{-1}(\{1\})$

continue   fermé

- $S_{N_\infty}(0,1)$ est bornée car $\subset BF(0,1)$

↳ incluse dans $[-1,1]^n$

compact comme produit de compacts

- $S_{N_\infty}(0,1)$ fermé dans un compact,

donc est compacte.

Ainsi N est continue sur le compact $S_{N_\infty}(0,1)$

donc admet un minimum en y_0

$y_0 \neq 0$ donc $\underbrace{N(y_0)}_{\text{noté } \alpha} \neq 0$

$\forall x \in E,\ x \neq 0 \quad \underset{\alpha}{\underset{\shortparallel}{N(y_0)}} \leq N\left(\dfrac{x}{N_\infty(x)}\right)$

$N_\infty\left(\dfrac{x}{N_\infty(x)}\right)$

$\left\|\dfrac{x}{\|x\|}\right\|$

donc $\alpha N_\infty(x) \leq N(x)$

Corollaire. Si E est de dimension finie, le caractère borné d'une partie, d'une suite ou d'une fonction ne dépend pas du choix de la norme. De même, le caractère ouvert, fermé ou dense d'une partie de dépend pas du choix de la norme.

Corollaire. Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $(x_p)_p$ une suite de E. On note $(x_p^k)_p$ les suites coordonnées, c'est-à-dire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$x_p = \sum_{k=1}^{n} x_p^k e_k$$

Alors :

$$(x_p)_p \text{ converge dans } E \iff \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ (x_p^k)_p \text{ converge dans } \mathbb{K}$$

Dans ce cas, en notant ℓ la lmite de $(x_p)_p$ et ℓ_k celle de $(x_p^k)_p$, on a :

$$\ell = \sum_{k=1}^{n} \ell_k e_k$$

Corollaire. Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $f : X \to E$ une application à valeurs dans E. On note $f_1, \ldots, f_n$ les applications coordonnées, c'est-à-dire que, pour tout $x \in X$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k$$

Alors :

$$f \text{ a une limite en } x_0 \iff \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ f_k \text{ a une limite en } x_0$$

Dans ce cas, en notant ℓ la lmite de f en x_0 et ℓ_k celle de f_k, on a :

$$\ell = \sum_{k=1}^{n} \ell_k e_k$$

4.3 Compacts d'un espace de dimension finie

Théorème.

> Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.

Remarque. *Ainsi, dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence, ou encore de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.*

fermé et inclus dans un compact

$O_n(\mathbb{R})$ est compact car fermé borné dans $M_n(\mathbb{R})$

? ?

Corollaire. Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, une suite $(u_n)_n$ converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Corollaire. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $(E, \|\cdot\|)$, alors F est fermé.