Compacité

Sauf mention contraire, on travaille dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

1 Suites extraites, valeurs d'adhérence d'une suite

1.1 Suites extraites

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments d'un ensemble X. On dit que v **est extraite de** u lorsqu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$$

L'application φ s'appelle **extractrice**.

Exemple. En posant $v_n = u_{2n}$, on définit la suite extraite de $(u_n)_n$ des termes d'indices pairs. Ici, $\varphi : n \mapsto 2n$.

Remarque. *Si $(u_{\varphi(n)})_n$ est extraite de $(u_n)_n$, et que ψ désigne une autre extractrice, la suite extraite de $(u_{\varphi(n)})_n$ est-elle :*

$$(u_{\psi\circ\varphi(n)})_n \text{ ou } (u_{\varphi\circ\psi(n)})_n \text{ ?}$$

Proposition. Si φ est une extractrice, c'est-à-dire une application : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$$

$u = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8 \text{ - - - })$

$v = (\underset{\substack{\uparrow \\ v_0}}{u_0}, \underset{\substack{\uparrow \\ v_1}}{u_2}, \underset{\substack{\uparrow \\ v_2}}{u_5}, \underset{\substack{\uparrow \\ v_3}}{u_6}, \underset{\substack{\uparrow \\ v_4}}{u_7} \text{ - - - }$

Preuve : par réc. $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geqslant 0$

On suppose $\varphi(n) \geqslant n$, par croissance stricte de φ,

$\varphi(n+1) > \varphi(n)$ donc $\varphi(n+1) \geqslant \varphi(n) + 1 \geqslant n+1$

1.2 Valeurs d'adhérence d'une suite

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, et $a \in E$. On dit que a **est une valeur d'adhérence de** $(u_n)_n$ si et seulement s'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers a.

Exemple. Les valeurs 1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de la suite $\left(\cos \frac{n\pi}{2}\right)_n$.

Proposition. On conserve les notations de la définition. Alors a est valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(*i*) $\forall \varepsilon > 0,\ \{n \in \mathbb{N},\ u_n \in B(a,\varepsilon)\}$ est infini ;

(*ii*) $\forall \varepsilon > 0,\ \{n \in \mathbb{N},\ u_n \in B(a,\varepsilon)\}$ est non majoré ;

(*iii*) $\forall \varepsilon > 0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \{n \geqslant p,\ u_n \in B(a,\varepsilon)\}$ est non vide.

Proposition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Si $(u_n)_n$ est convergente, alors elle admet une unique valeur d'adhérence, qui est sa limite.

Remarque. *La réciproque est fausse en général : une suite peut n'admettre qu'une seule valeur d'adhérence et ne pas être convergente.*

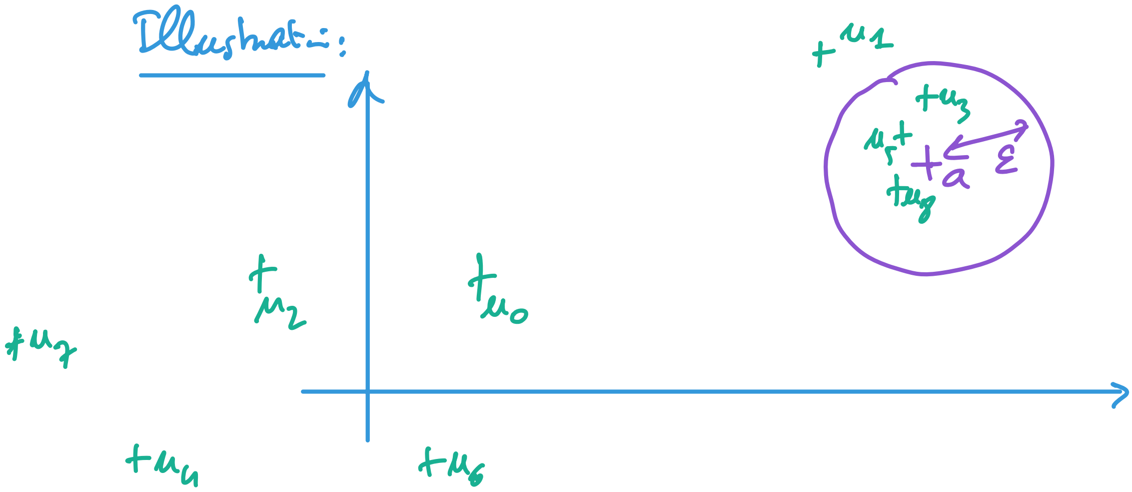
$u_n = (-1)^n + \frac{1}{2n}$

1 est limite de $(u_{2n})_n$

-1 ——— $(u_{2n+1})_n$

donc 1 et -1 sont valeurs d'adhérence de $((-1)^n)_n$

Illustration:



Preuve: (0) a val d'adhérence $\Leftrightarrow \exists \varphi\ \ u_{\varphi(n)} \to a$

(*i*) $\forall \varepsilon > 0,\ \{n \in \mathbb{N},\ u_n \in B(a,\varepsilon)\}$ est infini ;

(*ii*) $\forall \varepsilon > 0,\ \{n \in \mathbb{N},\ u_n \in B(a,\varepsilon)\}$ est non majoré ;

(*iii*) $\forall \varepsilon > 0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \{n \geqslant p,\ u_n \in B(a,\varepsilon)\}$ est non vide.

(i) $\Rightarrow$ (ii) partie de $\mathbb{N}$ infinie donc non majorée

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B(a,\varepsilon)\}$ non majoré donc p ne majore pas cet ensemble.

donc $\exists n \geq p$ tq $u_n \in B(a, \varepsilon)$

(iii) $\Rightarrow$ (o) On pose $\varphi(0) = 0$

On suppose $\varphi(n)$ est défini tq

$\varphi(n) > \varphi(n-1)$ et $\| u_{\varphi(n)} - a \| < \frac{1}{n}$

On applique (iii) avec $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ et $p = \varphi(n) + 1$

(iii) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\{n \geqslant p,\ u_n \in B(a, \varepsilon)\}$ est non vide.

donc $\exists \varphi(n+1) \geq p = \varphi(n) + 1$ tq $u_{\varphi(n+1)} \in B(a, \frac{1}{n+1})$

on a défini $\varphi(n+1)$ tq $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $\| u_{\varphi(n+1)} - a \| < \frac{1}{n+1}$

Donc φ est une extractrice.

et $\| u_{\varphi(n)} - a \| \xrightarrow[+\infty]{} 0$ donc $u_{\varphi(n)} \longrightarrow a$

Ainsi a val. d'adhérence de $(u_n)_n$.

(o) $\Rightarrow$ (i) (i) $\forall \varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N},\ u_n \in B(a, \varepsilon)\}$ est infini ;

On suppose $\exists \varphi$ extraction tq $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} a$

On applique la déf avec ε

$\exists N$ tq $\forall n \geq N$, $\| u_{\varphi(n)} - a \| < \varepsilon$

$\{n \in \mathbb{N}$ tq $u_n \in B(a, \varepsilon)\}$ contient

$\varphi(N), \varphi(N+1) \ldots \varphi(p) \ldots \quad p \geq N$

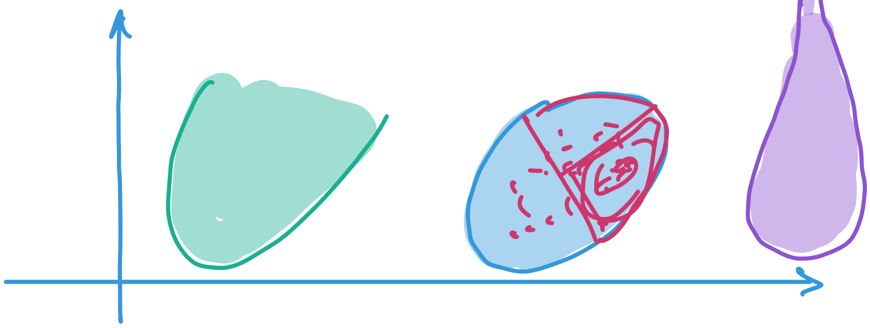
2 Parties compactes d'un espace vectoriel normé

2.1 Définition

Définition. Une partie X de E est dite **compacte** lorsque, de toute suite d'éléments de X, on peut extraire une suite converge dans X.

Remarque.

- *Il est équivalent de dire que toute suite d'élément de X a au moins une valeur d'adhérence dans X.*
- *L'ensemble vide $\varnothing$ est compact.*
- *Cette définition est dite « de Bolzano-Weierstrass », par opposition à celle de Borel-Lebesgue qui est hors programme.*



2.2 Propriétés

Proposition. Toute partie compacte est fermée et bornée.

Remarque. *Nous verrons plus tard que, si E est de dimension finie, la réciproque est vraie. Dans le cas d'un espace de dimension infinie, ce n'est pas le cas.*

Théorème.

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.

Preuve: Soit X un compact.

Mq que X fermé. Soit $(u_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ convergente (dans E) vers ℓ

X compact, donc $(u_n)_n$ admet une val d'adhérence $a \in X$.

donc $\exists \varphi$ extractrice tq $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

or $(u_{\varphi(n)})_n$ est extraite de $(u_n)_n$ convergente, donc $a = \ell$

$\in X$

donc $\ell \in X$.

Mq que X est borné. Par l'absurde

On suppose X non borné : $\forall \cancel{M}\, n$, $X \not\subset B(0, \cancel{M}\, n)$

il existe $u_n \in X \setminus B(0,n)$

On a construit $(u_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$

tq $\|u_n\| \geq n \quad \forall n$

Si φ extractrice,

$$\|u_{\varphi(n)}\| \geq \varphi(n)$$
$$\geq n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

donc $(u_{\varphi(n)})_n$ ne peut pas converger.

Contredit que X est compact.

Bref :

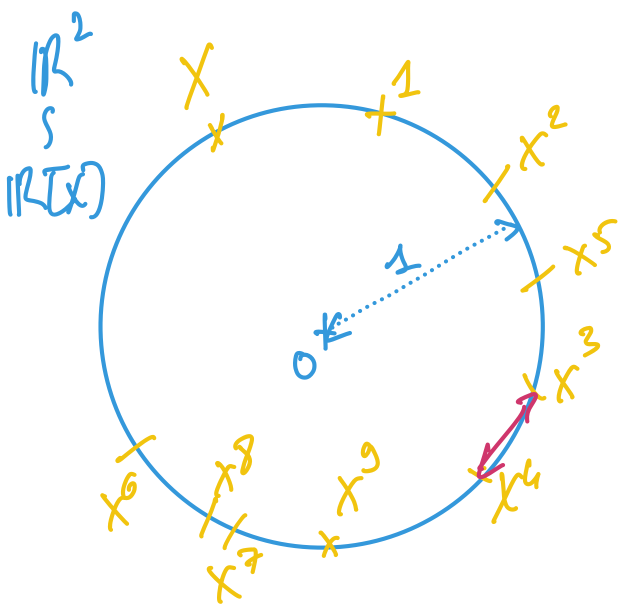
$$\text{Compact} \quad \overset{\Longrightarrow}{\underset{\text{finie}}{\overset{\text{en dim}}{\Longleftarrow}}} \quad \text{fermé-borné}$$

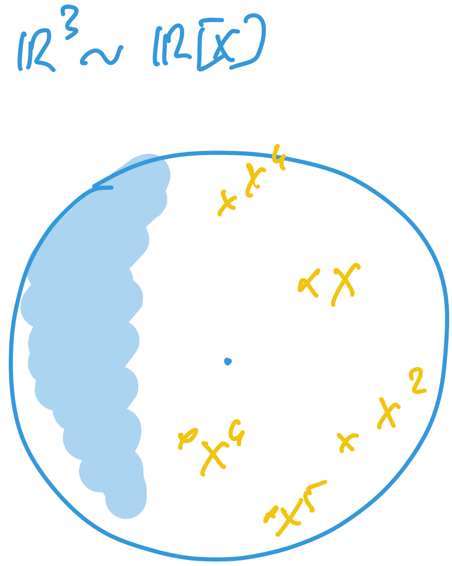
toute suite admet une val d'adh. dans le compact.

Exemple. On munit l'espace $E = \mathbb{K}[X]$ de la norme :

$$\|P\|_\infty = \operatorname*{Max}_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$$

où les a_k sont les coefficients du polynôme P. Trouver une suite d'éléments de $S(0,1)$ qui n'admette aucune valeur d'adhérence. Qu'a-t-on montré ?





$n \neq p$

$$\|X^n - X^p\|_\infty = 1$$

$(X^n)_n$ n'a aucune val d'adhérence.

Sinon, $\exists\, \varphi$ extractrice et P polynôme tq

$$X^{\varphi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} P$$

$$1 = \|X^{\varphi(n)} - X^{\varphi(n+1)}\|_\infty$$

$$\leq \|X^{\varphi(n)} - P\|_\infty + \|X^{\varphi(n+1)} - P\|_\infty$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc <u>$S(0,1)$ n'est pas compacte</u>

Pourtant $S(0,1)$ est fermé $\left(= \|\cdot\|^{-1}(\{1\})\right)$ borné

A fermé relatif de X signifie $A = X \cap F$ où F fermé.

Proposition. Un fermé relatif A d'une partie compacte X est un compact.

Remarque.

- *Comme X est compacte, c'est en particulier un fermé et donc dire que A est un fermé relatif de X revient à dire que c'est un fermé de E.*
- *On a en fait l'équivalence, lorsque $A \subset X$ et X compacte :*

$$A \text{ fermée} \iff A \text{ compacte}$$

Preuve : On suppose $\exists F$ fermé (de E) tq $A = X \cap F$

X compact.

Mque A compact.

Soit $(u_n)_n$ suite d'éléments de A,

donc $(u_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ et X compact

donc $(u_n)_n$ admet une val d'adhérence dans X.

notée a

$\exists \varphi$ extractrice tq $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} a$

$(u_{\varphi(n)})_n$ est une suite convergente

d'éléments de $F \cap X$ fermé comme inters de fermés.

donc $a \in F \cap X = A$

On a trouvé une extractrice tq $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} \underset{A}{\underset{\cap}{a}}$

donc a est val d'adhérence dans A

de $(u_n)_n$.

Proposition. Une suite d'éléments de X compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $u_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell$

Alors $\forall \varphi$ extractrice, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} \ell$

donc ℓ est la seule val. d'adhérence.

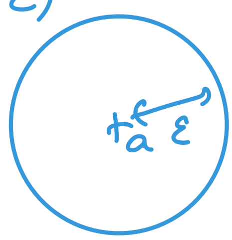
$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que a est l'unique val d'adhérence de $(u_n)_n$.

Mque $u_n \xrightarrow[+\infty]{} a$

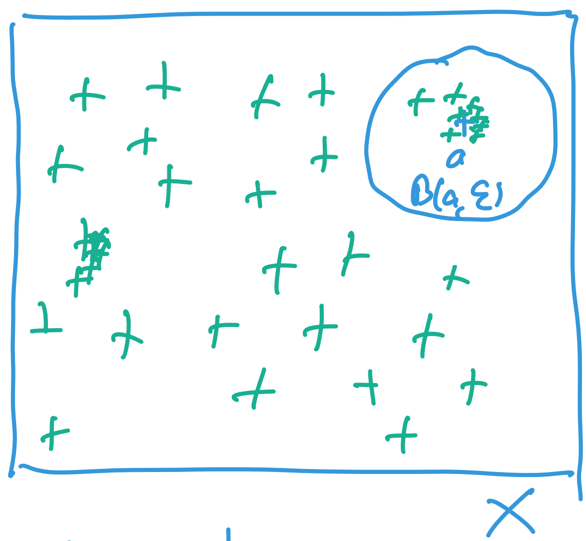
Par l'absurde, on suppose $u_n \not\xrightarrow[+\infty]{} a$

$\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall N, \exists n \geq N \; u_n \notin B(a, \varepsilon)$

on peut donc construire une extractrice tq $\forall n$



$u_{\varphi(n)} \notin B(a, \varepsilon)$



$(u_{\varphi(n)})_n$ est une suite de X qui est compact. Donc on peut en extraire une suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_n$ convergente dans X vers b

b val d'adhérence de $(u_n)_n$.

$\forall n, \; \| u_{\varphi(n)} - a \| \geq \varepsilon$

donc $\forall n \quad \|u_{\varphi(\psi(n))} - a\| \geq \varepsilon$

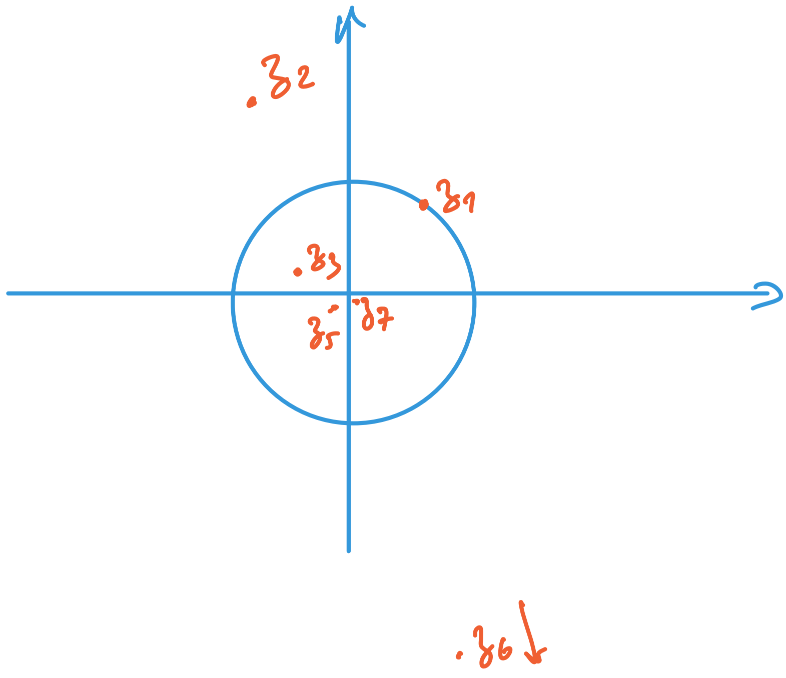
À la limite

$$\|b - a\| \geq \varepsilon$$

donc $b \neq a$.

Contredit l'unicité de la val. d'adhérence.

Exemple: $$z_n = \begin{cases} \frac{1}{n} e^{in} & \text{si } n \text{ impair} \\ n\, e^{in} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$



$(z_n)_n$ a une unique val d'adhérence : 0

$(z_n)_n$ ne converge pas.

2.3 Produit d'une famille finie de compacts

Proposition. Soit $(E_1, \|\cdot\|_1)$, ..., $(E_p, \|\cdot\|_p)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On considère, pour chaque $i \in \{1, \dots, p\}$, un compact X_i de E_i. Alors : $X = X_1 \times \cdots \times X_p$ est un compact de $E = E_1 \times \cdots \times E_p$, muni de la norme produit.

Remarque. *Ainsi, un produit (fini) de compacts est compact.*

Preuve: cas où $p = 2$ norme de $E_1 \times E_2$

est $\|(x,y)\| = \operatorname{Max}(\|x\|_1, \|y\|_2)$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de $X_1 \times X_2$

$u_n = (x_n, y_n)$

$(x_n)_n$ suite du compact X_1

donc $\exists \varphi$ extractrice tq $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} a \in X_1$

$(y_n)_n$ suite du compact X_2

~~donc~~ $\exists \varphi$ ~~extractrice~~ tq $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} b \in X_2$

$(y_{\varphi(n)})_n$ est une suite du compact X_2

donc on peut en extraire une suite cv dans X_2:

$\exists \psi$ extractrice tq $y_{\varphi \circ \psi(n)} \longrightarrow b \in X_2$

$(x_{\varphi \circ \psi(n)})_n$ est extraite de $(x_{\varphi(n)})_n$ qui

cv vers a, donc cv vers a.

On a alors $u_{\varphi \circ \psi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} (a, b) \in X_1 \times X_2$

Rappel : Si f continue et F fermé, $f^{-1}(F)$ fermé.

Remarque : Si f continue et F fermé, $f(F)$ est qcq

$\sin([0, 2\pi]) = [-1, 1]$

$\text{Arctan}(\underset{\text{fermé}}{\mathbb{R}}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

3 Applications continues sur une partie compacte

3.1 Image d'un compact par une application continue

Théorème.

L'image d'un compact par une application continue est compacte.

Remarque. *Il s'agit ici de l'image (directe) d'un compact par une application continue, qui est compacte. On sait aussi que l'image réciproque d'un ouvert (resp. d'un fermé) par une application continue est un ouvert (resp. un fermé).*

Preuve : Soit X compact, $f : X \longrightarrow F$ continue

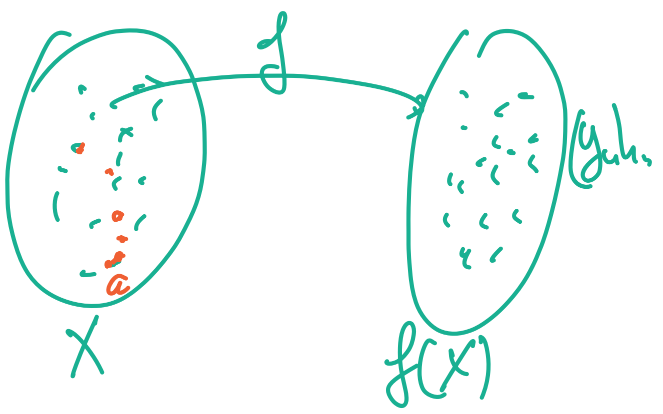
Mq $f(X)$ compact.

Soit $(y_n)_n$ suite de $f(X)$.

donc $\forall n, \exists x_n \in X$ tq $y_n = f(x_n)$.

Ainsi $(x_n)_n$ suite du compact X

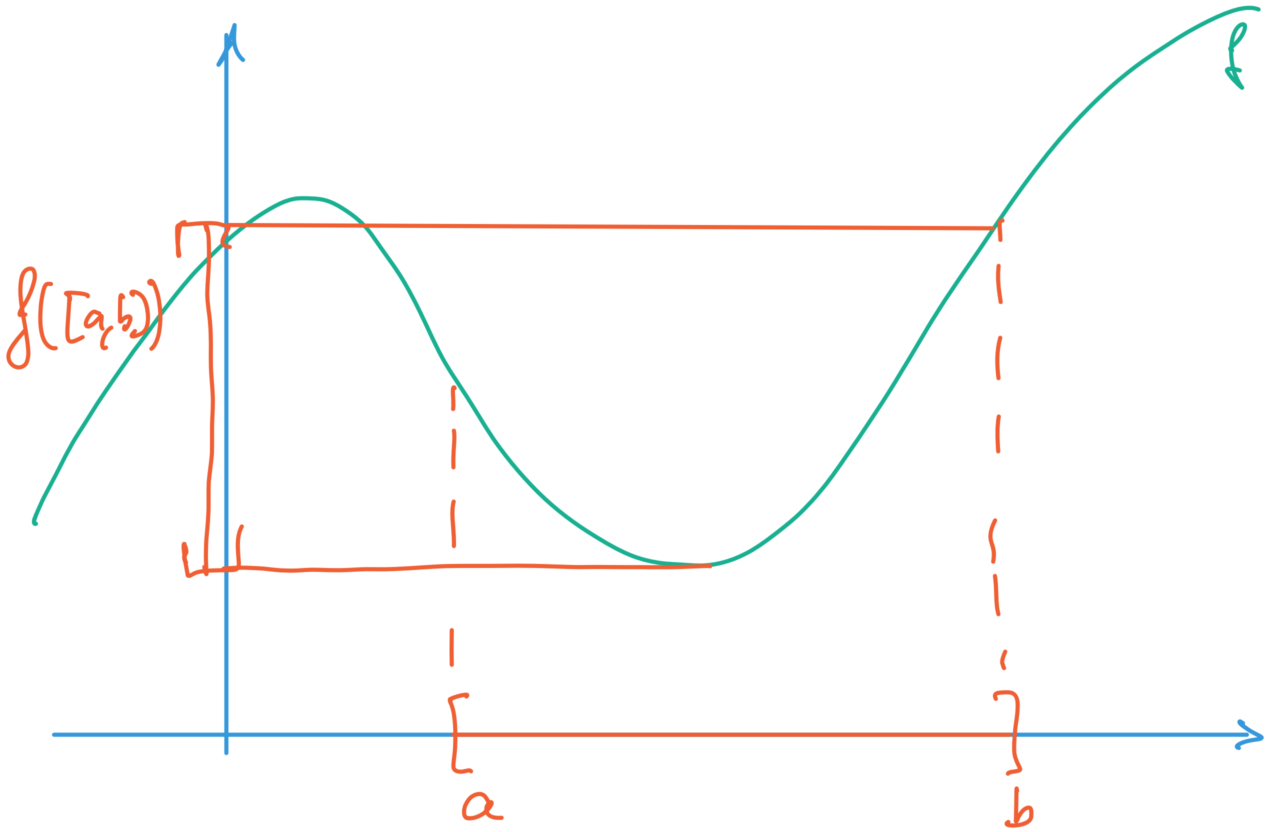
donc $\exists \varphi$ extractrice tq $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a \in X$



$$y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(a) \quad \text{par continuité de } f.$$

et $a \in X$ donc $f(a) \in f(X)$

On a trouvé $f(a) \in f(X)$ val d'adhérence de $(y_n)_n$.



f continue sur segment ...

Théorèmes des bornes atteintes.

$X \neq \emptyset$

> Soit E un espace vectoriel normé, et X une partie compacte de E. Soit :
>
> $$f : X \subset E \to \mathbb{R}$$
>
> Si f est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Remarque.

- *f atteint un minimum et un maximum sur X.*
- *C'est un théorème très utilisé pour montrer l'existence d'un maximum ou d'un minimum. On peut aussi se ramener à l'utilisation de ce théorème à l'aide d'une restriction à un compact.*

Preuve : On suppose f continue sur X compact.

- Alors $f(X)$ est compact donc bornée

  donc $\{f(x), x \in X\}$ est borné

  ie f est bornée

- $\sup_{x \in X} \{f(x)\}$ existe (noté M)

  car $\{f(x), x \in X\}$ partie de $\mathbb{R}$

  non vide majorée

  On veut mq c'est un max.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, par déf du sup,

$\exists y_n \in f(X)$ tq $M - \frac{1}{n} < y_n \leq M$

ie $\exists x_n \in X$ tq $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$

On a construit $(x_n)_n$ suite du compact X.

On en extrait $(x_{\varphi(n)})_n$ suite qui cv vers $a \in X$.

Or $\quad M - \dfrac{1}{\varphi(n)} < f(x_{\varphi(n)}) \leq M$

$$\begin{array}{c} M - \dfrac{1}{\varphi(n)} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle n \to +\infty} \\ M \end{array}$$

donc par encadrement, $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} M$.

$$\begin{array}{c} f(x_{\varphi(n)}) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle n \to +\infty} \\ f(a) \end{array}$$

$f(a)$ par continuité de f.

Donc, par unicité $f(a) = M$

Ainsi le sup est atteint en a : c'est un max.

3.2 Continuité uniforme

Théorème de Heine.

Une fonction continue sur un compact est uniformément continue sur ce compact.

f unif continue sur X : $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \alpha > 0$ tq $\forall x, y \in X$

$$\|x-y\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| \leq \varepsilon$$

Preuve :

Par l'absurde.

$\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}^* \; \exists x_n, y_n \in X$ tq

$$\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n} \text{ et } \|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon$$

$(x_n, y_n)_n$ est une suite du compact $X \times X$

(produit de 2 compact)

donc $\exists \varphi$ extractrice tq

$$(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \longrightarrow (a, b) \in X \times X$$

ie $x_{\varphi(n)} \to a$ et $y_{\varphi(n)} \to b$

$$\underset{\downarrow \atop \|a-b\|}{\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\|} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{\varphi(n)}}$$

donc $a = b$

et $\forall n$ $\|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\| > \varepsilon$

donc à la limite

$$\underbrace{\|f(a) - f(b)\|}_{0} \geq \varepsilon$$

Contradiction

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

4.1 Exemples : compacts de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$

Théorème de Bolzano-Weierstrass.

De toute suite bornée de réels ou de complexes on peut extraire une suite convergente.

Remarque. *Ce théorème, démontré en première année par dichotomie, peut s'exprimer maintenant en disant que toute suite bornée de réels ou de complexes admet au moins une valeur d'adhérence.*

Corollaire. Les compacts de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{C}$) sont les parties fermées et bornées de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{C}$).

Remarque.

- *Les segments sont des compacts de $\mathbb{R}$, ce sont les intervalles compacts. Mais il y a beaucoup de compacts qui ne sont pas des intervalles.*
- *Tout compact X de $\mathbb{R}$ est fermé et borné, donc inclus dans $[\mathrm{Inf}(X), \mathrm{Sup}(X)] = [\mathrm{Min}(X), \mathrm{Max}(X)]$. C'est pour cela que, sur $\mathbb{R}$, les expressions « sur tout compact » ou « sur tout segment » ont le même sens.*

4.2 Équivalence des normes en dimension finie

Théorème.

Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire. Si E est de dimension finie, le caractère borné d'une partie, d'une suite ou d'une fonction ne dépend pas du choix de la norme. De même, le caractère ouvert, fermé ou dense d'une partie de dépend pas du choix de la norme.

Corollaire. Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $(x_p)_p$ une suite de E. On note $(x_p^k)_p$ les suites coordonnées, c'est-à-dire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$x_p = \sum_{k=1}^{n} x_p^k e_k$$

Alors :

$$(x_p)_p \text{ converge dans } E \iff \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ (x_p^k)_p \text{ converge dans } \mathbb{K}$$

Dans ce cas, en notant ℓ la lmite de $(x_p)_p$ et ℓ_k celle de $(x_p^k)_p$, on a :

$$\ell = \sum_{k=1}^{n} \ell_k e_k$$

Corollaire. Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $f : X \to E$ une application à valeurs dans E. On note $f_1, \ldots, f_n$ les applications coordonnées, c'est-à-dire que, pour tout $x \in X$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k$$

Alors :

$$f \text{ a une limite en } x_0 \iff \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ f_k \text{ a une limite en } x_0$$

Dans ce cas, en notant ℓ la lmite de f en x_0 et ℓ_k celle de f_k, on a :

$$\ell = \sum_{k=1}^{n} \ell_k e_k$$

4.3 Compacts d'un espace de dimension finie

Théorème.

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.

Remarque. *Ainsi, dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence, ou encore de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.*

Corollaire. Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, une suite $(u_n)_n$ converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Corollaire. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $(E, \|\cdot\|)$, alors F est fermé.