Pour jë 32.5

32.6

46.1

3 Isométries d'un espace euclidien

3.1 Définition

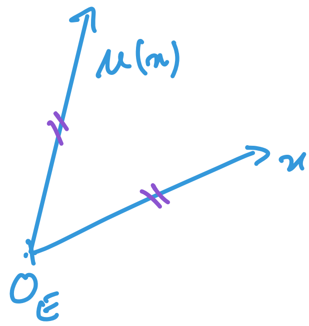
Définition. Soit u un endomorphisme de E. On l'appelle **isométrie vectorielle** lorsqu'elle conserve les normes :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$$

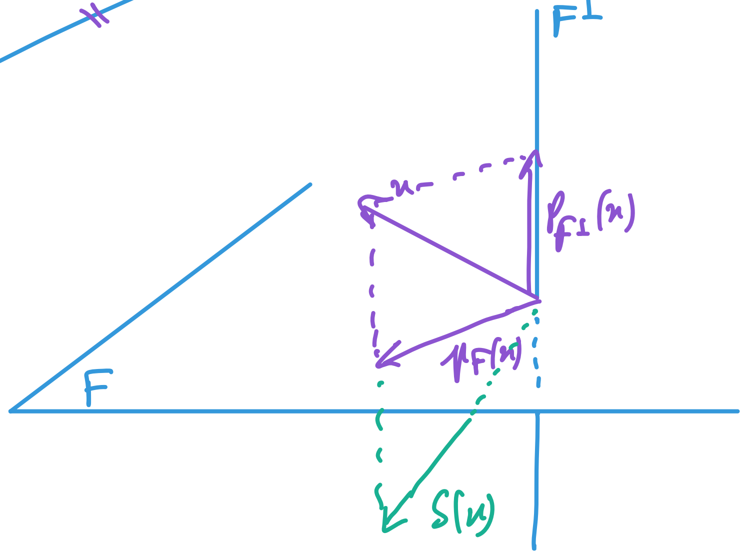
On note $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles.

Remarque. *On trouve aussi, dans la littérature, la terminologie automorphisme orthogonal.*

Exemple. Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles.
Les projecteurs orthogonaux ne sont pas, en général, des isométries vectorielles.



Soit s symétrie orthogonale par rapport à F.



$$\|s(x)\|^2 = \|p_F(x) - (x - p_F(x))\|^2 \quad \text{Pythagore}$$

$$= \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$$

car $p_F(x) \perp (x - p_F(x))$

$$= \|p_F(x) + (x - p_F(x))\|^2 = \|x\|^2$$

donc $s \in O(E)$

3.2 Caractérisations

Proposition. l'endomorphisme u est une isométrie vectorielle si et seulement s'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

Preuve : $\boxed{\Leftarrow}$ $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $x, y \in E$

$$\langle u(x), u(y)\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right)$$

car u linéaire

$$= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

car u préserve la norme

$$= \langle x, y\rangle$$

32.2

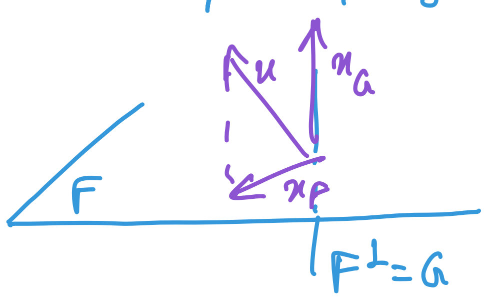
$\boxed{C}$ $\boxed{D}$

Soit E espace euclidien.
Montrer que les symétries orthogonales de E sont les isométries vectorielles qui sont des endomorphismes autoadjoints.

$\boxed{C}$ on a vu plus haut que si s sym orthog alors s isométrie vectorielle.

Mque $s \in S(E)$.

Soit $x, y \in E$ Mque $\langle x, s(y)\rangle = \langle s(x), y\rangle$



On note $x = \underset{\underset{F}{\cap}}{x_F} + \underset{\underset{F^\perp}{\cap}}{x_G}$, $y = y_F + y_G$

$$\langle x, s(y) \rangle = \langle x_F + x_G, y_F - y_G \rangle$$

$$= \langle x_F, y_F \rangle + \underbrace{\langle x_G, y_F \rangle}_{=0}$$

$$- \underbrace{\langle x_F, y_G \rangle}_{=0} - \langle x_G, y_G \rangle$$

car $x_F \perp x_G$, $x_G \perp y_F$

$$= \langle x_F, y_F \rangle - \langle x_G, y_G \rangle$$

Chouette, expression symétrique en x et y.

$\langle y, s(x) \rangle =$ la même chose.

M2 $\langle x, s(y) \rangle = \langle s(x), s \circ s(y) \rangle$ car $s \in O(E)$

$= \langle s(x), y \rangle$ car s symétrique

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $u \in O(E)$ et $u \in S(E)$

Mq u symétrie orthogonale.

u peu plus tard.

Proposition. L'endomorphisme u est une isométrie vectorielle si et seulement si l'image d'une base orthonormée de E par u est une base orthonormée de E.

$u \in O(E) \iff \forall \mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ base orthonormée de E

$(u(e_1) \dots u(e_n))$ base orthonormée de E

Preuve: $\boxed{\Rightarrow}$ u préserve le produit scalaire donc

$$\langle u(e_i), u(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$$

$$= \delta_{ij}$$

donc $(u(e_i))_i$ est une base orthonormée.

$\boxed{\Leftarrow}$ Mq u préserve la norme.

Soit $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ base orthonormée de E.

Soit $x \in E$, $\quad x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$

or $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$

car $\mathcal{B}$ base orthonormée.

On calcule: $u(x) = u\left(\sum_{i=1}^{n} \langle x | e_i \rangle e_i\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle x | e_i \rangle u(e_i))$$

$(\langle x, e_i \rangle)_i$ coord de $u(x)$ dans $(u(e_i))_i$ base orthonormée

donc $\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x | e_i \rangle^2$

Proposition. L'endomorphisme u est une isométrie vectorielle si et seulement si :

$$u^* \circ u \quad \cancel{u \circ u^*} = \mathrm{Id}_E$$

ou encore, c'est équivalent, $\cancel{u^* \circ u}$ $u \circ u^*$ $= \mathrm{Id}_E$. Ainsi, les éléments de $\mathrm{O}(E)$ sont les automorphismes de E dont l'inverse est l'adjoint.

Preuve : $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$

Soit $x \in E$

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle$$
$$= \langle x, u^* \circ u(x) \rangle$$
$$= \langle x, x \rangle \quad \text{car } u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$$
$$= \|x\|^2$$

donc $u \in \mathrm{O}(E)$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $u \in \mathrm{O}(E)$

Mque $u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$

Soit $x \in E$ Mque $u^* \circ u(x) = x$

ie $\langle y, u^* \circ u(x) \rangle = \langle y, x \rangle$ $\forall y \in E$

$$\forall y \in E \quad \langle y, u^* \circ u(x) \rangle = \langle u(y), u(x) \rangle$$
$$= \langle y, x \rangle \quad \text{car } u \in \mathrm{O}(E)$$

donc $\langle y \mid u^* \circ u(x) - x \rangle = 0$ $\forall y \in E$

donc $u^* \circ u(x) - x \in E^\perp = \{0\}$

Fin de $\boxed{32.2}$

$\boxed{\supset}$ Soit $u \in O(E) \cap S(E)$

<u>Mq u symétrie orthogonale.</u>

- $u \circ u = u^* \circ u$ car $u^* = u$

$$= Id_E \quad \text{car } u \in O(E)$$

donc u est une symétrie

c'est la symétrie par rapport à $F = E_1(u)$

de direction $G = E_{-1}(u)$

- $u \in S(E)$ donc par le th. spectral

$$E = E_1(u) \overset{\perp}{\oplus} E_{-1}(u)$$

$$= F \overset{\perp}{\oplus} G$$

3.3 Propriétés

Proposition. Toute isométrie vectorielle est bijective : c'est un automorphisme de E.

Preuve : ben oui, elle préserve la norme !

Soit $u \in O(E)$ $\qquad u : E \longrightarrow E$

Si $x \in \mathrm{Ker}(u)$, $\quad u(x) = 0$

donc $\underbrace{\|u(x)\|}_{\|x\|} = 0 \qquad$ donc $x = 0$

M2 : $u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$

et $u \in \mathcal{L}(E)$ où E de dim finie.

donc u inversible et $u^{-1} = u^*$

Proposition. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$. Alors $\det(u) = \pm 1$

Remarque. *Attention ! la réciproque est bien-sûr fausse.*

Preuve : $u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$

donc $\det(u^* \circ u) = 1$

$$\det(u^* \circ u) = \det(u^*)\det(u) = \det(u)^2$$

3.4 Le groupe $\mathrm{O}(E)$

Proposition. $\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$. On appelle $\mathrm{O}(E)$ le **groupe orthogonal de** E.

Preuve

- $O(E) \subset GL(E)$ car les isom vectorielles sont des automorphismes
- Id_E préserve la norme donc $Id_E \in O(E)$
- Soit $u, v \in O(E)$

  $\forall x \in E \quad \|v \circ u(x)\| = \|u(x)\|$ car $v \in O(E)$
  $= \|x\|$ car $u \in O(E)$

  donc $v \circ u \in O(E)$

  R2 : $(v \circ u)^* \circ (v \circ u) = u^* \circ \underbrace{v^* \circ v} \circ u$
  $= u^* \circ Id_E \circ u$
  $= Id_E$

- Soit $u \in O(E)$ Mq $u^{-1} \in O(E)$.

  Pour $x \in E$

  $\|x\| = \|u \circ u^{-1}(x)\|$
  $= \|u^{-1}(x)\|$ car $u \in O(E)$

  R2 : $(u^{-1})^* \circ u^{-1} = (u^*)^{-1} \circ u^{-1}$
  $= (u \circ u^*)^{-1} = Id^{-1} = Id$

ou $O^+(E)$

Définition. On note $\mathrm{SO}(E) = \{u \in \mathrm{O}(E),\ \det(u) = 1\}$. C'est un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$, appelé le **groupe spécial orthogonal**.
Ses éléments sont les isométries vectorielles **directes**.
Les éléments de $\mathrm{O}(E) \setminus \mathrm{SO}(E)$ sont les isométries vectorielles **indirectes**.

$$\det : \begin{array}{rcl} O(E) & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ u & \longmapsto & \det(u) \end{array}$$

morphisme des groupes $(O(E), \circ)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$

et $SO(E) = \det^{-1}(\{1\})$

$= \ker(\det)$

4 Matrices orthogonales

4.1 Définition

Définition. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice orthogonale** si et seulement si :

$$A^{T}A \quad \cancel{AA^\top} = I_n$$

On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ (ou parfois $\mathrm{O}(n)$) l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4.2 Caractérisations

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sont équivalentes :

(i) A est une matrice orthogonale ;

(ii) $A^\top A = I_n$, i.e. les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$;

(iii) A est inversible et $A^{-1} = M^\top$;

(iv) $AA^\top = I_n$, i.e. les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$;

Preuve: $(i) \iff (ii)$ par déf

$(ii) \iff (iii)$ parce que A carrée

$(iii) \iff (iv)$ ______

Preuve:

Soit $A = \begin{pmatrix} C_1 \,|\, C_2 \,|\, \cdots \,|\, C_n \end{pmatrix}$

$$A^T A = \begin{pmatrix} C_1^T \\ \hline C_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline C_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \,|\, C_2 \,|\, \cdots \,|\, C_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_1^T C_1 & C_1^T C_2 & \cdots \\ & & \end{pmatrix}$$

$$= \left(C_i^T \, C_j \right)_{i,j}$$

$$= \left(< C_i , C_j > \right)_{i,j}$$

où $<.>$ est produit scalaire canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$

hors diago

$$A^T A = I_n \iff \begin{cases} \forall i \neq j & < C_i , C_j > = 0 \\ \forall i & < C_i , C_i > = 1 \end{cases}$$

sur diago

$$\iff \forall i, j \quad < C_i , C_j > = \delta_{ij}$$

$$\iff (C_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ base orthonormée}$$

<u>Exemple</u>: Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$

<u>Car</u>

$$< C_1 , C_2 > = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 = 0$$

$$< C_1 , C_3 > = \frac{1}{\sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{18}} - \frac{2}{\sqrt{18}} = 0$$

$$< C_2 , C_3 > = 0$$

$$\|C_1\|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \qquad \|C_2\|^2 = \|C_3\|^2 = 1$$

Proposition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Alors :

$$u \in \mathrm{O}(E) \iff \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$$

Remarque. *L'hypothèse base orthonormée est essentielle ici.*

Rmq : parfois, on dit que u est un automorphisme orthogonal.

Preuve. Comme $\mathcal{B}$ base orthonormée,

$$\mathrm{Mat}(u^*, \mathcal{B}) = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})^T$$

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{O}(E) &\iff u^* \circ u = \mathrm{Id}_E \\ &\iff \mathrm{Mat}(u^* \circ u, \mathcal{B}) = I_n \\ &\iff \mathrm{Mat}(u^*, \mathcal{B})\,\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = I_n \\ &\iff \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})^T\,\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = I_n \\ &\iff \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, et $\mathcal{B}'$ une famille de n vecteurs de E. Alors :

$$\mathcal{B}' \text{ est une base orthonormée} \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$$

et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} e'_1 & \cdots & e'_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

Preuve: Ben oui,

On note $C_1 \ldots C_n$ les colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$

$$C_j = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_j)$$

Comme $\mathcal{B}$ base orthonormée,

$$\langle e'_i, e'_j \rangle = C_i^\top C_j$$

$$= \langle C_i, C_j \rangle$$

de $M_{n,1}(\mathbb{R})$

$\mathcal{B}'$ orthonormée $\iff \forall i, j \quad \langle e'_i, e'_j \rangle = \delta_{ij}$

$\iff \forall i, j \quad \langle C_i, C_j \rangle = \delta_{ij}$

$\iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in O_n(\mathbb{R})$

4.3 Propriétés

Proposition. Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors :

- A est inversible, et $A^{-1} = A^\top$
- $\det A = \pm 1$

mais ça n'est pas suffisant pour justifier $A \in O_n(\mathbb{R})$

4.4 Le groupe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$

Proposition. $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$. On appelle $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ le **groupe orthogonal d'ordre** n.

Définition. On note $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ \det(A) = 1\}$ (parfois aussi noté $\mathrm{O}_n^+(\mathbb{R})$). C'est un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, appelé le **groupe spécial orthogonal d'ordre** n.
Ses éléments sont les matrices orthogonales **directes** (ou **positives**).
Les éléments de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont les matrices orthogonales **indirectes** (ou **négatives**).

Amusons-nous.

Gram-Schmidt $(a_1, \dots, a_n)$ base qcq

$\downarrow$

$(e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée.

$$u_1 = a_1 \qquad e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

$$u_2 = a_2 - p_1(a_2) = a_2 - \langle a_2 | e_1 \rangle e_1 \qquad e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$$

$$u_3 = a_3 - \underbrace{\left(\langle a_3 | e_1 \rangle e_1 + \langle a_3 | e_2 \rangle e_2 \right)}_{p_{\mathrm{Vect}(u_1, u_2)}(a_3)} \qquad e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$$

$\exists ! \, (e_1 \dots e_n)$ base orthonormée tq

$$\begin{cases} \forall k \quad \mathrm{Vect}(e_1 \dots e_k) = \mathrm{Vect}(a_1 \dots a_k) \\ \langle e_k , a_k \rangle > 0 \end{cases}$$

Soit A une matrice inversible.

$$A = \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & \dots & a_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_n \\ \vdots & & \vdots \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \mathrm{Mat}_{can}(a_1 \dots a_n)$$

$(a_1 \dots a_n)$ base de $\mathbb{R}^n$

$(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$

orthonormée pour le p.s. canonique.

On orthonormalise $\longrightarrow$ $(e_1 \dots e_n)$

base orthonormée.

$$Q = \mathrm{Pass}\left(\mathrm{can} \to (e_1 \dots e_n)\right)$$

$$\in O_n(\mathbb{R})$$

(passage entre 2 bases orthonormées)

$A = PA'P^{-1} \qquad A \longleftrightarrow u \longleftrightarrow A'$

$X = PX' \qquad X \longleftrightarrow x \longleftrightarrow X'$

$$A_j \xleftrightarrow{\mathrm{can}} a_j \xleftrightarrow{(e_1 \dots e_n)} R_j$$

$$A_j = \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(a_j) \qquad\qquad R_j = \mathrm{Mat}_{(e_i)}(a_j)$$

Par la formule de changement de base :

$$A_j = Q\, R_j$$

Donc : $\quad A = Q\, R \quad$ où $R = (R_1 | \dots | R_n)$

Bref: On veut décrire:

$$A = QR$$

où $Q \in O_n(\mathbb{R})$

et R ?

$$R_j = \mathrm{Mat}_{(e_1 \dots e_n)}(a_j)$$

où $(e_1 \dots e_n)$ base orthonormée

$$= \begin{pmatrix} \langle a_j | e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle a_j | e_j \rangle \\ \vdots \\ \langle a_j | e_n \rangle \end{pmatrix}$$

or $\mathrm{Vect}(a_1 \dots a_k) = \mathrm{Vect}(e_1 \dots e_k) \ \forall k$

donc $a_j \in \mathrm{Vect}(e_1 \dots e_j)$

on s'arrête à j, pas n.

$$a_j = \sum_{i=1}^{j} \langle a_j, e_i \rangle e_i + \sum_{i=j+1}^{n} 0 \, e_i$$

donc $R_j = \begin{pmatrix} \langle a_j, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle a_j, e_j \rangle \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Ainsi $R = \begin{pmatrix} \langle a_1, e_1\rangle & \langle a_2, e_1\rangle & \cdots & \langle a_n, e_1\rangle \\ 0 & \langle a_2, e_2\rangle & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \langle a_n, e_n\rangle \end{pmatrix}$

R est triangulaire supérieure, à coeff diagonaux > 0.

<u>Résultat</u> : décomposition QR.

Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$
$\exists\, Q \in O_n(\mathbb{R})$, R triangulaire supérieure à coeff diag >0 tq $A = QR$
et il y a unicité.

<u>Utilisation</u> : Résolvons $AX = B$ où $A \in GL_n(\mathbb{R})$

où $A = QR$ $\quad Q \in O_n(\mathbb{R})$

$R \in T_n^S(\mathbb{R})$ coeff diag >0

$$AX = B \iff QRX = B$$

$\Longleftrightarrow \quad RX = Q^T B$

système triangulaire.