Pour dimanche soir : exercice à rédiger

44.11, 44.12, 45.16, 45.17

2.3 Le théorème spectral

Théorème spectral - version endomorphisme.

Soit E espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$u \in \mathcal{S}(E) \iff E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

$$\iff \exists \mathcal{B} \text{ base orthonormée t.q. } \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \text{ diagonale}$$

Remarque.

- *On dit parfois que tout endomorphisme autoadjoint d'une espace euclidien est orthodiagonalisable.*
- *On note bien que les espaces propres des endomorphismes autoadjoints sont orthogonaux.*

$u \in \mathcal{S}(E) \iff \forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$

Preuve : Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ $\qquad \mathbb{K} = \mathbb{R}$

$\boxed{1}$ Mque $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$ (en fait : u a toutes ses vp réelles)

$\mathcal{B} = (e_1 \ldots e_n)$ base orthonormée

$A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$

Mque $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$

Soit λ vp de A dans $\mathbb{C}$.

$A\bar{Z} = \overline{AZ} = \bar{\lambda}\bar{Z}$

Donc $\exists Z \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ tq $AZ = \lambda Z \quad Z \neq 0$

$\bar{Z}^T A Z \qquad (\quad)(\quad)(\quad) = (\cdot) \in \mathbb{C}$

$= \bar{Z}^T (\lambda Z)$

$= \lambda \, \bar{Z}^T Z$

$= \lambda \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & \cdots & \bar{z}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{z_i} = \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}_{>0}$$

D'autre part $\bar{Z}^T A Z = \bar{Z}^T \bar{A} Z$ car A à coeff réels

$$= \bar{Z}^T \bar{A}^T Z \quad A \text{ symétrique}$$

$$= (\bar{A}\bar{Z})^T Z$$

$$= (\bar{\lambda}\bar{Z})^T Z$$

$$= \bar{\lambda} \, \bar{Z}^T Z$$

$$= \bar{\lambda} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}_{>0}$$

Donc $\lambda = \bar{\lambda}$

$\boxed{2}$ Mq u est diagonalisable

Par récurrence forte sur $\dim E = n$

- Si E de dim 1, $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = (\alpha)$ est diagonale

- Soit E de dim $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{S}(E)$

On suppose que tout autoadjoint d'un espace de dim $< n$ est diagonalisable.

Par $\boxed{1}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vp de u.

On note $E_\lambda(u)$ l'espace propre associé

1er cas : si $\dim E_\lambda(u) = n$

i.e. $E_\lambda(u) = E$ et $u = \lambda \mathrm{Id}_E$

u diagonalisable

2e cas : Si $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq n-1$

On sait $E = E_\lambda(u) \oplus \underbrace{E_\lambda(u)^\perp}_{F}$

de dim ≥ 1, $\leq n-1$

$E_\lambda(u)$ stable par u et $u \in \mathcal{S}(E)$

donc $E_\lambda(u)^\perp = F$ stable par u.

On peut donc envisager les endomorphismes induits

$$v_1 = u_{E_\lambda(u)}, \quad v_2 = u_F$$

v_1 et v_2 sont autoadjoints

(en effet $\langle v_1(x), y\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$
$x, y \in E_\lambda(u)$
$= \langle x, v_1(y)\rangle$)

Par l'H.R v_1 et v_2 diagonalisables.

Or $E = E_\lambda(u) \oplus F$

donc u diagonalisable

$\boxed{3}$ Soit λ, μ deux vp distincts.

$x \in E_\lambda(u)$, $y \in E_\mu(u)$

ie $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$

$$\langle u(x), y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$$
$$\shortparallel$$
$$\langle x, u(y)\rangle = \mu \langle x, y\rangle$$

or $\lambda \neq \mu$ donc $\langle x, y\rangle = 0$

<u>Ainsi</u> les espaces propres sont 2 à 2 ~~disjoints~~ orthogonaux.

<u>CCl</u> : Par $\boxed{2}$: $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$

Par $\boxed{3}$ $= \overset{\perp}{\bigoplus}_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$

En concaténant des bases orthonormées de chaque $E_\lambda(u)$, on conclut.

<u>Remarques</u> Si E de dim 3 -

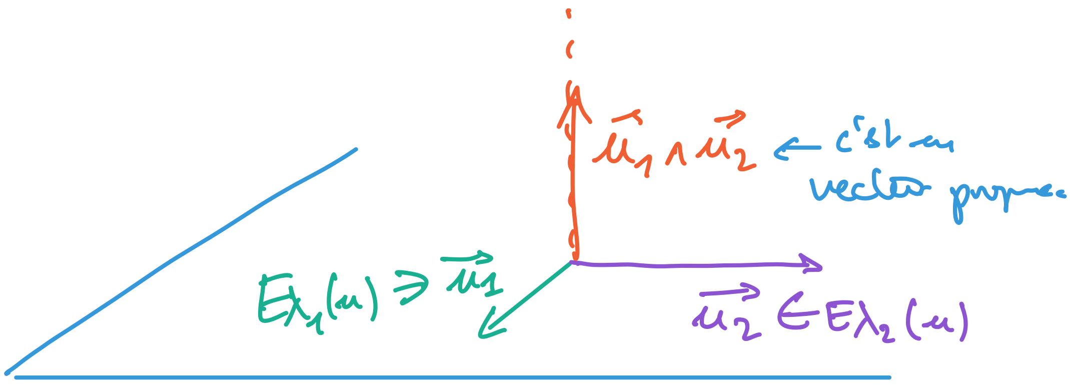
On remarque que un plan P est formé de vecteurs propres.

Alors $P^\perp$ est une droite propre.

Remarque :

dim 3

$u \in \mathcal{S}(E)$



Théorème spectral matriciel.

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :
>
> $$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \iff A \text{ est orthogonalement diagonalisable}$$
>
> c'est-à-dire que l'on peut écrire :
>
> $$A = PDP^\top$$
>
> où D est une matrice diagonale et P une matrice orthogonale, c'est-à-dire une matrice dont les colonnes forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

Remarque. *L'étude des matrices orthogonale est menée au § 4. On y montre que les matrices orthgonales sont les matrices de passage entre bases orthonormées, et qu'on les inverse en transposant.*

$A = PDP^{-1}$ $\qquad$ $P = \text{Pass}(\text{can} \to \text{base de vect. propres})$

Si P = Passage entre 2 bases orthonormées,

alors $P^{-1} = P^T$

2.4 Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

Définition. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. On dit qu'il est **positif** lorsque :

$$\forall x \in E,\ \langle x, u(x) \rangle \geqslant 0$$

On dit qu'il est **défini positif** lorsque :

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\},\ \langle x, u(x) \rangle > 0$$

On note $\mathcal{S}^+(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs (resp. définis positifs).

Remarque.

- *Pour montrer que u est défini positif, on peut aussi montrer :*

$$\forall x \in E,\ \begin{cases} \langle x, u(x) \rangle \geqslant 0 \\ \langle x, u(x) \rangle = 0 \implies x = 0 \end{cases}$$

- *On ne qualifie un endomorphisme de positif que s'il est déjà autoadjoint.*
- *$\mathcal{S}^+(E)$ et $\mathcal{S}^{++}(E)$ sont stables par l'addition (mais ce ne sont pas des espaces vectoriels).*

Remarque:

Si $u \in S^{++}(E)$, $(x,y) \mapsto \langle x, u(y) \rangle$

est une forme bilinéaire symétrique positive, déf. positive

Rappel: Si $\mathcal{B}$ base orthonormée de E

$$x \longleftrightarrow X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

$$u \longleftrightarrow A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$$

$$\langle x, y \rangle = X^T Y$$

$$\langle x, u(x) \rangle = X^T (AX)$$

$$= X^T A X$$

Définition. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On dit qu'elle est **positive** lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}),\ X^\top AX \geqslant 0$$

On dit qu'elle est **définie positive** lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^\top AX > 0$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définies positives).

Remarque.

- *Pour montrer que A est définie positive, on peut aussi montrer :*

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}),\ \begin{cases} X^\top AX \geqslant 0 \\ X^\top AX = 0 \implies X = 0 \end{cases}$$

- *On ne qualifie une matrice de positive que si elle est déjà symétrique.*
- *$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sont stables par l'addition (mais ce ne sont pas des espaces vectoriels).*

Caractérisation spectrale - version endomorphisme.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Alors :

$$u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$$

Caractérisation spectrale - version matricielle.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors :

$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$$

Preuve à connaître

Version matricielle Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Mq $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

ie $\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ $X^T A X \geq 0$

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$

On sait déjà $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit X vecteur propre associé à λ.

On a donc $X^T A X \geq 0$

$$X^T A X = X^T \lambda X = \lambda \|X\|^2$$

or $\|X\|^2 > 0$ $(X \neq 0)$ donc $\lambda \geq 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.

Mq $\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, $X^T A X \geq 0$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ quelconque.

On applique le th spectral :

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les vp de A.

$\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tq

$$A = P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{D} P^T$$

On calcule alors :

$$X^T A X = \underbrace{X^T P}_{Y^T} D \underbrace{P^T X}_{Y}$$

$$= Y^T D Y$$

$$= (y_1 \dots y_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

$\geqslant 0$ car $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$

$\Leftarrow$ On suppose $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. Mq $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Si $X^T A X = 0$

alors $Y^T D Y = 0$

ie $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = 0$

Somme nulle de termes ≥ 0

donc $\forall i \quad \lambda_i y_i^2 = 0$

or $\forall i \ \lambda_i \neq 0$ car $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$

donc $\forall i \quad y_i^2 = 0$

Donc $Y = 0$

donc $X = PY = 0$

Ainsi $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Pour λ vp de A, X vecteur propre associé ;

$$0 < \underset{\lambda \underbrace{\|X\|^2}_{>0}}{\overset{\|}{X^T A X}}$$

donc $\lambda > 0$

<u>Version vectorielle</u> Soit u autoadjoint

<u>Prop $\quad u \in S^+(E) \Leftrightarrow Sp(u) \subset \mathbb{R}_+$</u>

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $u \in S^+(E)$

i.e. $\forall x \in E, \quad \langle x, u(x) \rangle \geq 0$

Soit $\lambda \in Sp(u)$

On sait déjà que $\lambda \in \mathbb{R}$ car $u \in S(E)$

Soit $x \in E_\lambda(u)$, $x \neq 0_E$

$$0 \leq \langle x, u(x) \rangle$$
$$= \langle x, \lambda x \rangle$$
$$= \lambda \underbrace{\|x\|^2}_{>0}$$

donc $\lambda \geq 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+$

Mq $u \in S^+(E)$

Soit $x \in E$ qcq.

Par le th spectral, $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$

où λ_i 2 à 2 distincts ≥ 0

donc $x = x_1 + \dots + x_p$

où chaque $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$

$$\langle x, u(x) \rangle = \langle \sum_{i=1}^{p} x_i, u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j\right) \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \langle x_i , \underbrace{u(x_j)}_{\lambda_j x_j} \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \langle x_i , x_j \rangle$$

$E_{\lambda_i}(u) \perp E_{\lambda_j}(u)$
pour $i \neq j$

$$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, \|x_i\|^2$$

$\geqslant 0$ car $\lambda_i \geqslant 0 \ \forall i$