MCOT

Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens

Dans tout le chapitre, sauf mention contraire, E est un espace euclidien et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est son produit scalaire.

1 Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien

1.1 Définition, matrice de l'adjoint en base orthonormée

Définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

L'endomorphisme u^* s'appelle l'**adjoint** de u.

$$u : E \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto u(x)$$

$$u^* : E \longrightarrow E$$
$$y \longmapsto u^*(y) \text{ tq } \forall x \in E$$
$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

Preuve : . Soit $y \in E$

$$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \langle u(x), y\rangle$$

est une forme linéaire par linéarité de u

et bilinéarité du produit scalaire.

Donc $\exists !\, a \in E$ tq $\varphi = \langle a, \cdot \rangle$

On note $u^*(y)$ à la place de a.

<u>Rmq</u>: $\forall x, y \in E \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$

$$\cancel{= \langle u^*(y), x \rangle}$$

• <u>Mque $u^* \in \mathcal{L}(E)$</u>

* u^* est à valeurs dans E

* Soit $y, z \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\forall x \in E \quad \langle x, u^*(\lambda y + \mu z) \rangle$

$$= \langle u(x), \lambda y + \mu z \rangle$$

$$= \lambda \langle u(x), y \rangle + \mu \langle u(x), z \rangle$$

$$= \lambda \langle x, u^*(y) \rangle + \mu \langle x, u^*(z) \rangle$$

$$= \langle x, \lambda u^*(y) + \mu u^*(z) \rangle$$

$\forall x \in E \quad \langle x, u^*(\lambda y + \mu z) - \lambda u^*(y) - \mu u^*(z) \rangle = 0$

donc $u^*(\lambda y + \mu z) - \lambda u^*(y) - \mu u^*(z) \in \underbrace{E^\perp}_{= \{0\}}$

donc $u^*(\lambda y + \mu z) = \lambda u^*(y) + \mu u^*(z)$

$$\begin{array}{ccc} E & & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ u & \longleftrightarrow & A \\ x & \longleftrightarrow & X \\ u^{-1} & \longleftrightarrow & A^{-1} \end{array}$$

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}(u^*, \mathcal{B}) = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})^\top$$

Remarque. *L'hypothèse base orthonormée est essentielle ici.*

Corollaire. u et u^* ont même trace, même déterminant, même polynôme caractéristique, même spectre.

Remarque. *En revanche, ils n'ont pas pas les mêmes vecteurs propres.*

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base ON de E

$$B = \mathrm{Mat}(u^*, \mathcal{B}) = \begin{array}{c@{}c} \begin{array}{ccccc} u^*(e_1) & \dots & u^*(e_j) & \dots & u^*(e_n) \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccccc} & & & & \\ & & & & \\ & & \boxed{} & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \right) & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ e_n \end{array} \end{array}$$

la coord selon e_i de $u^*(e_j)$
c'est $\langle e_i , u^*(e_j) \rangle$ car $\mathcal{B}$ ON.

$$A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \left(\langle e_i , u(e_j) \rangle \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

$$\forall i,j \quad \langle e_i , u^*(e_j) \rangle = \langle u(e_i), e_j \rangle$$

$$b_{ij} \quad = \quad a_{ji}$$

Remarque Ah ben oui !

en base ON :

$$E \ni x \longleftrightarrow X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$$

$$y \longleftrightarrow Y$$

$$\mathcal{L}(E) \ni u \longleftrightarrow A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}
\langle u(x), y \rangle &= \left(\mathrm{Mat}_B(u(x))\right)^T \left(\mathrm{Mat}_B(y)\right) \\
&= (AX)^T Y \\
&= (X^T A^T)\, Y \\
&= X^T.(A^T Y) \\
&= \left(\mathrm{Mat}_B(x)\right)^T \left(\mathrm{Mat}(v) \times \mathrm{Mat}_B(y)\right)
\end{aligned}$$

v dont la matrice est A^T

$$= \langle x, \cancel{v(y)} \rangle$$

$u^*(y)$

Remarque:

$$X^T M Y = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

1er cas : M diagonale

$$X^T D Y = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 y_1 \\ \vdots \\ d_n y_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} d_i x_i y_i$$

2e cas : cas général.

$$X^T M Y = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} m_{1j} y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} m_{nj} y_j \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} m_{ij} y_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_i y_j$$

1.2 Propriétés

Proposition. Pour $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

- $(\lambda u + \mu v)^* = \lambda u^* + \mu v^*$
- $(u^*)^* = u$
- $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$
- Si u est bijectif, u^* aussi et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$

B bon ON

$(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$

$(A^T)^T = A$

$(AB)^T = B^T A^T$

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

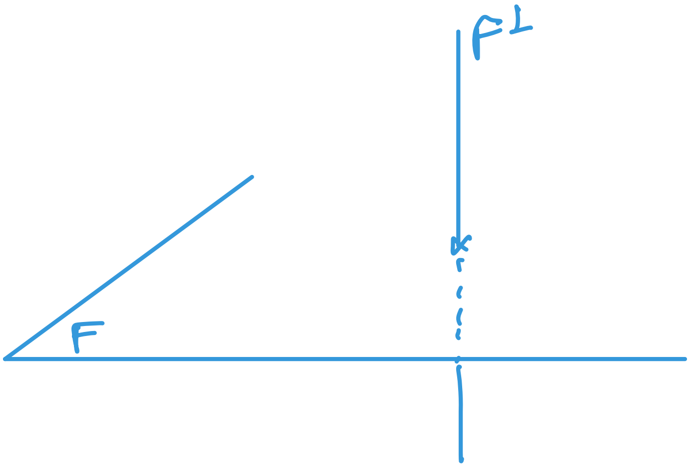
Preuve:

$\forall x, y \in E$

$$\begin{aligned}
\langle x, (\lambda u + \mu v)^* (y) \rangle &= \langle (\lambda u + \mu v)(x), y \rangle \\
&= \lambda \langle u(x), y \rangle + \mu \langle v(x), y \rangle \\
&= \lambda \langle x, u^*(y) \rangle + \mu \langle x, v^*(y) \rangle \\
&= \langle x, (\lambda u^* + \mu v^*)(y) \rangle
\end{aligned}$$

donc $(\lambda u + \mu v)^*(y) = (\lambda u^* + \mu v^*)(y)$

Proposition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.



On suppose F stable par u.

Mque $F^\perp$ stable par u^*

Soit $y \in F^\perp$ Mque $u^*(y) \in F^\perp$

$\forall x \in F$, $\langle x, u^*(y) \rangle$

$= \langle u(x), y \rangle$

$= 0$ car $x \in F$ donc $u(x) \in F$ et $y \in F^\perp$

Donc $F^\perp$ stable par u^*.

2 Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

2.1 Définition, matrice en base orthonormée

Définition. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **autoadjoint** lorsque $u^* = u$, i.e. :

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E.

Remarque. *On qualifie parfois les endomorphismes autoadjoints (i.e. $u^* = u$) de symétriques, mais on évitera cette terminologie, car il n'y a aucune raison que ça soit une symétrie (i.e. $u \circ u = \mathrm{Id}_E$).*

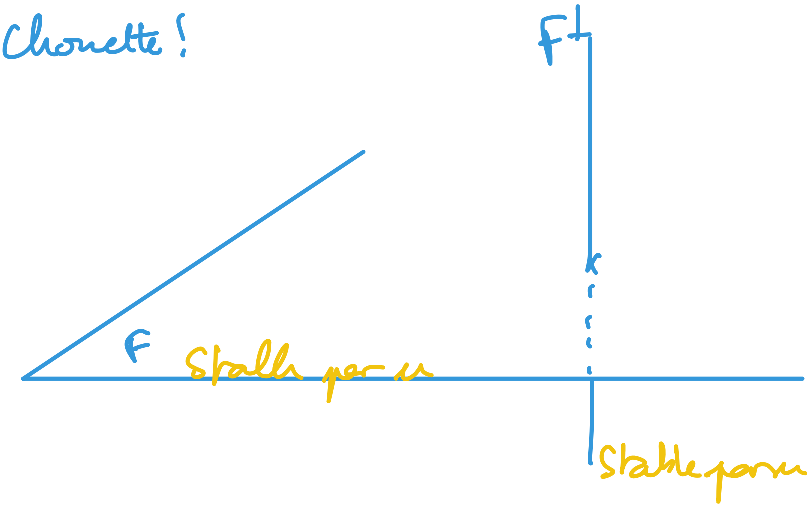
$\mathcal{B}$ base ON de E

$u \in S(E) \longleftrightarrow \mathrm{Mat}(u) \in S_n(\mathbb{R})$

$u^* = u \qquad M^T = M$

Proposition. Soit u endomorphisme autoadjoint de E et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

Chouette !



On peut n'étudier u que sur F et $F^\perp$

(u_F et $u_{F^\perp}$)

$E = F \oplus F^\perp$

$$\mathrm{Mat}(u, \text{base adaptée}) = \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

Proposition. Soit E espace euclidien de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Fixons $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Alors :

$$u \in \mathcal{S}(E) \iff \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

c'est-à-dire que u est autoadjoint si et seulement si sa matrice en base orthonormée est symétrique.

Remarque. *L'hypothèse base orthonormée est essentielle ici.*

Corollaire. La dimension de $\mathcal{S}(E)$ est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2.2 Porjecteurs orthogonaux

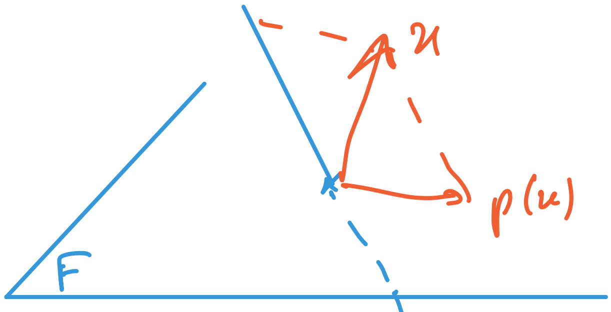
Proposition. Soit p un projecteur (i.e. $p \circ p = p$). Alors p est un projecteur orthogonal (i.e. $\mathrm{Ker}\, p \perp \mathrm{Im}\, p$) si et seulement si p est autoadjoint.

Soit p projecteur sur $\underbrace{F}_{\mathrm{Ker}(p-\mathrm{Id}) = \mathrm{Im}\, p}$ de direction $\underbrace{G}_{\mathrm{Ker}\, p}$

où $E = F \oplus G$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supp p autoadjoint

Mque $F \perp G$



Soit $x \in F = \mathrm{Im}\, p$ → ~~$\exists t \in E$ $x = p(t)$~~ G

$p(x) = x$

$y \in G = \mathrm{Ker}\, p$ — $p(y) = 0$

$\langle x, y \rangle$

$= \langle p(x), y \rangle$

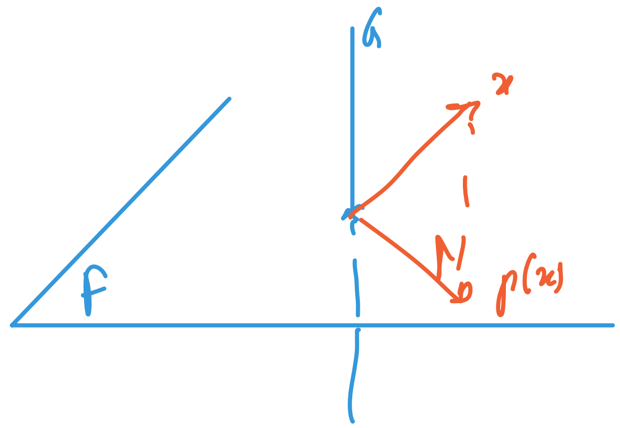
$= \langle x, p(y) \rangle$ car $p \in \mathcal{S}(E)$

$= \langle x, 0 \rangle$

$= 0$ donc $F \perp G$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $F \perp G$

Mque u autoadjoint



Soit $x, y \in E$

$$\langle p(x), y \rangle$$

$$= \langle p(x), \overbrace{y - p(y)}^{G} + \overbrace{p(y)}^{\in F} \rangle$$

$$= \langle \underbrace{p(x)}_{\in F}, \underbrace{y - p(y)}_{\in G} \rangle + \langle p(x), p(y) \rangle$$

$$= \langle p(x), p(y) \rangle$$

expression symétrique en x et y

$$= \langle p(y), x \rangle$$

$$= \langle x, p(y) \rangle$$

donc p est autoadjoint.