Pour ve : 45.2, 45.3, 45.15

Continuité des applications linéaires, multilinéaires

1 Continuité des applications linéaires

1.1 Caractérisation

Théorème.

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors u est continue si et seulement si :

$$\exists C \geqslant 0,\ \forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant C\|x\|$$

Remarque. *Ce résultat est très important, car il convient de savoir y faire référence dès que la question posée est celle de la continuité d'une application qui est linéaire.*

Notation. On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.

$$u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

Rmq : cela revient à dire u est C-lipschitzienne

$$\|u(x) - u(y)\| = \|u(x-y)\| \quad \text{linéarité}$$
$$\leqslant C\,\|x-y\|$$

Pour u linéaire, l'étude de u en x_0 est l'étude en 0_E.

Preuve : u continue $\iff \exists C$ tq $\forall x \in E$ $\|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E$

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $x_0 \in E$.

$$\forall x \in E, \quad \|u(x) - u(x_0)\|_F = \|u(x - x_0)\|_F$$
$$\leq C\|x - x_0\|_E$$
$$\xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose u continue.

En particulier u est continue en 0.

Par déf avec $\varepsilon = 1$.

D'où $\alpha > 0$ tq $\forall x \in E$

$$\|x - 0\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|u(x) - u(0)\|_F \leq 1$$

$$x \in BF(0, \alpha) \Rightarrow u(x) \in BF(0, 1)$$

Posons $C = \frac{1}{\alpha}$.

Pour $x \in E$, $x \neq 0$

$$\alpha . \frac{x}{\|x\|} \in BF(0, \alpha)$$

donc $u\left(\alpha \frac{x}{\|x\|}\right) \in BF(0, 1)$

ie $\left\|u\left(\alpha \frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F \leq 1$

$$\| \frac{\alpha}{\|x\|_E} u(x) \|_F$$

$$\frac{\alpha}{\|x\|} \quad \|u(x)\|$$

Bref : pour $x \neq 0$, $\|u(x)\| \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|$

(encore valable pour $x = 0$)

Cl : $u \in \mathcal{L}(E,F)$ continue $\Longleftrightarrow \exists C$ tq $\forall x$

$\|u(x)\| \leq C \|x\|$

$\mathcal{L}(E,F)$ = ensemble des applications linéaires

$\mathcal{L}_c(E,F)$ = " " " continues

$L(E,F)$

1.2 Cas où E est de dimension finie

Théorème.

> Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
> Si E est de dimension finie, alors u est continue.

Lmieux ! lipschitzienne.

Preuve : Notons $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$ les normes de E et F.

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E.

Soit $x \in E$, $(x_1, \dots, x_n)$ ses coord dans $\mathcal{B}$

$\mathbb{K}^n$

On note $\|x\|_\infty = \max_{k=1}^{n} |x_k|$ équivalente à $\|.\|_E$

donc $\exists \alpha, \beta > 0$ $\| \ \|_\infty \leq \beta \|.\|_E$

$$\|u(x)\|_F = \left\| u\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) \right\|_F$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \, u(e_k) \right\|_F$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \, \|u(e_k)\|_F$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \|x\|_\infty \, \|u(e_k)\|_F$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \|u(e_k)\|_F \right) \|x\|_\infty$$

$$\leq \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(e_k)\|_F \right) \beta}_{\substack{C \\ \text{indep de } x}} \|x\|_E$$

donc u est continue

Remarque: E est de dim finie
F est de dim qcq.

Corollaire. Soit E un espace vectoriel normé de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On appelle **application coordonnée** :

$$\pi_i : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & x_i \end{array}$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ est le n-uplet des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
Les applications coordonnées sont continues.

Preuve: π_i est une forme linéaire sur E de dim finie.

1.3 Norme subordonnée

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Pour $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$, on pose :

$$\|u\|_{\text{op}} = \operatorname*{Sup}_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

que l'on appelle **norme d'opérateur** ou **norme subordonnée** aux deux normes fixées sur E et F.

Remarque. *On utilise aussi la notation* $\|u\|_{\text{op}} = |||u|||$.

Théorème.

> Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
> $\|\cdot\|_{\text{op}}$ définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$.

Preuve:

- Pour $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$, $\exists C$ tq $\forall x \in E$ $\|u(x)\| \leq C\|x\|$

  donc $\forall x \neq 0$, $\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq C$

  d'où l'existence de $|||u|||$.

Remarque: $|||u|||$ est le plus petit C tq

$\forall x \in E$ $\|u(x)\| \leq C\|x\|$

En particulier: $\forall x \in E$ $\|u(x)\| \leq |||u||| \, \|x\|$

- positivité: $\forall x \in E, x \neq 0$, $\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} \geq 0$

  donc le Sup est ≥ 0

- Séparation: Soit $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ tq $|||u||| = 0$

  ie $\operatorname*{Sup}_{x \neq 0} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} = 0$

  Sup nul de termes ≥ 0 donc

  $\forall x \neq 0$ $\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} = 0$

donc $\forall x \neq 0 \quad u(x) = 0$

pour $x = 0$, on a aussi $u(x) = 0$

Donc $\forall x \in E, \ u(x) = 0$ i.e. $u = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$

- Inég. triangulaire.

Soit $u, v \in \mathcal{L}_c(E,F)$

$\forall x \in E \setminus \{0\}$

$$\frac{\|(u+v)(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{\|u(x)\| + \|v(x)\|}{\|x\|}$$

$$\leq \underbrace{|||u||| + |||v|||}_{\text{indép de } x}$$

donc $|||u+v||| \leq |||u||| + |||v|||$

- Homogénéité.

Soit $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$|||\lambda u||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\lambda u(x)\|}{\|x\|}$$

$$= |\lambda| \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

Remarque:

$$|||u||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

$$= \sup_{\|x\| = 1} \|u(x)\|$$

En effet :

- $$\left\{ \frac{\|u(x)\|}{1},\ \|x\|=1 \right\} \subset \left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|},\ x \neq 0 \right\}$$

Donc

$$\sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

- $\forall x \neq 0$

$$\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \left\| u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|$$

homogénéité de $\|.\|$
linéarité de u

$$\leq \sup_{\|y\|=1} \|u(y)\|$$

car $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$

indep de x

donc $$|||u||| \leq \sup_{\|y\|=1} \|u(y)\|$$

Intérêts : c'est donc un sup sur $S(0,1)$ (plutôt que $E\setminus\{0\}$)

$S(0,1)$ | fermée : c'est $\|.\|^{-1}(\{1\})$
| bornée.

Proposition. Si $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$, alors :

- $\|u\|_{\text{op}} = \underset{\|x\|_E=1}{\text{Sup}} \|u(x)\|_F$
- $\|u\|_{\text{op}}$ est le plus petit $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$$

Si $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}_c(F,G)$, alors :

- $\|v \circ u\|_{\text{op}} \leqslant \|v\|_{\text{op}}\|u\|_{\text{op}}$

Preuve:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{u} & F & \xrightarrow{v} & G \\ x & \longmapsto & u(x) & \longmapsto & v(u(x)) \end{array} \qquad (E \xrightarrow{v\circ u} G)$$

$\forall x \in E \quad \|v\circ u(x)\|_G = \|v(u(x))\|_G$

$\leq |||v|||\ \|u(x)\|_F$

par déf de $|||v|||$

$\leq |||v|||\ |||u|||\ \|x\|_E$

par déf $|||u|||$

donc $|||v|||\ |||u|||$ est un C tq

$\|v\circ u(x)\|_G \leq C\ \|x\|_E$

Donc $|||v\circ u||| \leq |||v|||\ |||u|||$

(déf de la borne sup)

$u : E \longrightarrow E$

Corollaire. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors $\|\cdot\|_{\text{op}}$ définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$ qui vérifie :

- $\|\text{Id}_E\|_{\text{op}} = 1$
- $\forall u, v \in \mathcal{L}_c(E)$, $\|v \circ u\|_{\text{op}} \leqslant \|v\|_{\text{op}}\|u\|_{\text{op}}$
- $\forall u \in \mathcal{L}_c(E)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|u^k\|_{\text{op}} \leqslant \|u\|_{\text{op}}^k$

On dit que $\|\cdot\|_{\text{op}}$ est une **norme d'algèbre unitaire**.

par récurrence.

$$|||u^k||| = |||u \circ \dots \circ u|||$$
$$\leq |||u|||^k$$

$(\mathcal{L}_c(E), |||.|||)$

limites

$(u_n)_n \qquad u_n \in \mathcal{L}_c(E)$

$\sum u_n$

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \xrightarrow[N \to +\infty]{} v$$

$$\left|\left|\left| \sum_{n=0}^{N} u_n - v \right|\right|\right| \longrightarrow 0 \ ?$$

$(\mathbb{R}^3, \|.\|_2) \qquad u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) = \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^3)$

$|||u|||$

1.4 Adaptation matricielle

Proposition. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit :

$$|||A||| = \underset{\substack{X\in\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})\\ X\neq 0}}{\text{Sup}} \frac{\|AX\|}{\|X\|} = \underset{\|X\|=1}{\text{Sup}} \|AX\|$$

On définit ainsi une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

- $|||I_n||| = 1$
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ |||AB||| \leqslant |||A|||\ |||B|||$
- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall k \in \mathbb{N},\ |||A^k||| \leqslant |||A|||^k$

$|||\cdot|||$ dépend du choix de $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

On choisit $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Calculer $|||A|||$

(ie la meilleure constante C tq $\forall X,\ \|AX\| \leq C\|X\|$)

On note $A = (a_{ij})_{i,j}$

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$:

$$AX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\, x_j \end{pmatrix} \text{ noté } \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\|AX\|_\infty = \max_{k=1}^{n} |y_k|$$

$$\forall k \in \{1,\dots,n\} \quad |y_k| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, x_j \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|\,|x_j|$$

$$\leq \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|\right)}_{\cancel{=C\,?}} \|X\|_\infty$$

non : dépend de k

$$\leq \underbrace{\max_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|\right)}_{\text{indép de } X} \|X\|_\infty$$

donc $|||A||| \leq \max_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|\right)$

Déterminons un X pour lequel il y a égalité

Notons k_0 un indice tq

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{k_0 j}| = \max_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|\right)$$

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

où $x_j = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{k_0 j} > 0 \\ -1 & \text{si } a_{k_0 j} < 0 \\ 0 & \text{si } a_{k_0 j} = 0 \end{cases}$

$$\left| [AX]_{k_0} \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{k_0 j}\, x_j}_{\geq 0} \right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{k_0 j}|$$

pour $k \neq k_0$ $\quad \left| [AX]_k \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |a_{k_0 j}|$$

donc $\quad \|AX\|_\infty = \sum_{j=1}^{n} |a_{k_0 j}| \; \|X\|_\infty$

<u>ccl</u> : $\quad |||A||| = \max_{k} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$

2 Continuité des applications multilinéaires

2.1 Caractérisation

Proposition. Soit $E_1, \dots, E_p, F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et $f : E_1 \times \dots \times E_p \to F$ une application multilinéaire. Alors f est continue si et seulement si :

$$\exists C \geqslant 0,\ \forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p,\ \|f(x_1, \dots, x_p)\|_F \leqslant C\|x_1\|_{E_1} \dots \|x_p\|_{E_p}$$

$$f : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & F \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & f(x_1, x_2) \end{array} \quad \text{bilinéaire}$$

f continue sur $E_1 \times E_2 \iff \exists C \geq 0$ tq $\forall x_1, x_2$

$$\|f(x_1, x_2)\| \leq C \|x_1\| \|x_2\|$$

Corollaire. Si $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien réel, alors le produit scalaire est continu sur $E \times E$.

$\langle \cdot , \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire.

$\forall x_1, x_2 \in E$

$$|\langle x_1, x_2 \rangle| \leq 1 . \|x_1\| \|x_2\|$$

par Cauchy-Schwarz.

donc $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est continu

$\Pi_i : E \longrightarrow \mathbb{K}$ continue linéaire
$x \longmapsto x_i$ i^e coordonnée

2.2 Applications polynomiales sur un espace de dimension finie

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, on définit l'application :

$$m_{(k_1,\ldots,k_n)} = \pi_1^{k_1}\pi_2^{k_2}\ldots\pi_n^{k_n} \; : \; x \mapsto x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$$ continue

où $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est le n-uplet des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
On appelle **application polynomiale sur** E toute application : $E \to \mathbb{K}$ qui est combinaison linéaire des $m_{(k_1,\ldots,k_n)}$.

Remarque. *Le fait qu'une application soit polynomiale ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$.*

$f : E \longrightarrow \mathbb{K}$
$\vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) = \sum_{\ldots} \lambda \, x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$

Proposition. Toute application polynomiale sur un espace de dimension finie est continue.

CL de produit d'application coordonnées
qui sont linéaires en dim finie, donc continues

Exemple. L'application det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$A \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

est polynomiale (en les coord de A dans la base canonique)

donc continue

2.3 Applications multilinéaires en dimension finie

Proposition. Soit $E_1, \dots, E_p, F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
S'ils sont de dimensions finies, toute application multilinéaire $f : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ est continue.

idem pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$

E de dim finie

Exemple. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $\det_{\mathcal{B}}$ est continue sur E^n.

$$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$M \longmapsto \det(M)$$

$$\det_{\mathcal{B}} \quad E^n \longrightarrow \mathbb{K} \qquad \mathcal{B} \text{ base de } E.$$
$$(x_1 \dots x_n) \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1 \dots x_n)$$

multilinéaire, E de dim finie

donc $\det_{\mathcal{B}}$ continue

donc $\exists C > 0$ tq $\forall x_1 \dots x_n$

$$|\det_{\mathcal{B}}(x_1 \dots x_n)| \leq C \|x_1\| \dots \|x_n\|$$

Méthode : $u : E \to F$ linéaire continue ?

idée 1 : E de dim finie.

idée 2 : On majore $\|u(x)\|$ par $C\|x\|$

idée 3 : si on soupçonne non continuité

Mq $\neg\left(\exists C \text{ tq } \forall x \ \|u(x)\| \leq C\|x\|\right)$

$\forall C \ \exists x \ \|u(x)\| > C\|x\|$

On construit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$

tq $\|x_n\| \to \cancel{\text{cste}}\ 0$ et $\|u(x_n)\| \to \text{cste}$

ou $\|x_n\| \to \text{cste}$ et $\|u(x_n)\| \to \cancel{\text{cste}}\ \infty$