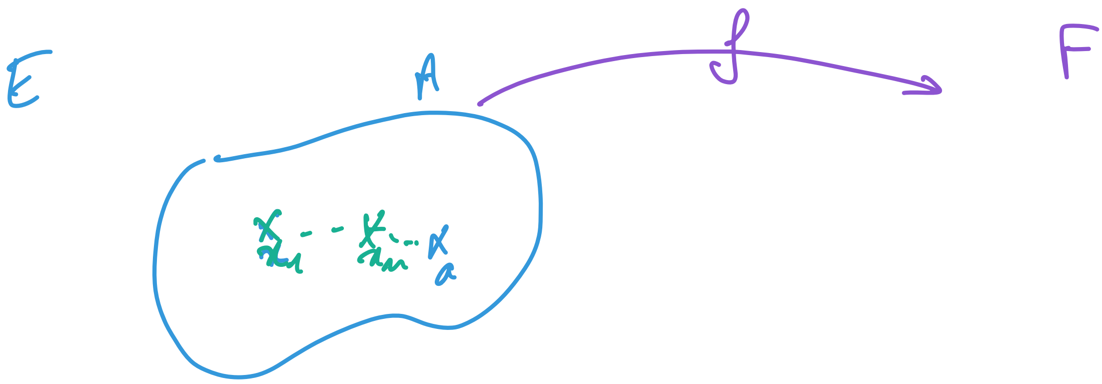
Pour jé : 44.2, 44.3, 44.6

Limite, continuité dans un espace vectoriel normé

$f : A \subset (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (F, \|\cdot\|_F)$

2.2 Caractérisation séquentielle

Proposition. Soit $f : A \subset E \to F$ et $a \in A$. f est continue en a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.



$\|x_n - a\|_E \longrightarrow 0$ $\qquad$ $\|f(x_n) - f(a)\|_F \longrightarrow 0$

2.5 Continuité et densité

Théorème.

Soit $f, g : A \subset E \to F$ deux applications. Si :

- f et g sont continues sur A,
- $\forall x \in D \subset A,\ f(x) = g(x)$,
- D est dense dans A,

alors :

- $f = g$ i.e. $\forall x \in A,\ f(x) = g(x)$.

Remarque. *Ainsi, pour montrer une propriété « continue » sur un ensemble, il suffit de la montrer sur une partie dense de cet ensemble.*

Preuve :

Soit $a \in A$.

D dense dans A donc $\exists (u_n)_n \in D^{\mathbb{N}}$ tq $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $f(u_n) = g(u_n)$ car $u_n \in D$

$f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(a)$ et $g(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} g(a)$

par continuité de f et g en a.

Donc $f(a) = g(a)$

Rmq : $GL_n(\mathbb{K})$ dense dans $M_n(\mathbb{K})$

3 Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé, par une application continue

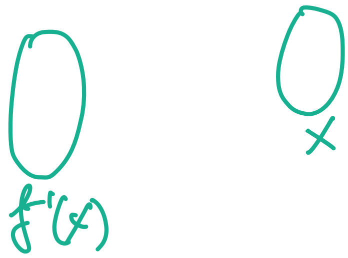
Théorème.

Soit $f : A \subset E \to F$ une application continue. Alors l'image réciproque par f d'un ouvert (resp. fermé) est un ouvert (resp. fermé) relatif de A :

- Si X est ouvert, $f^{-1}(X)$ est un ouvert de A
- Si X est fermé, $f^{-1}(X)$ est un fermé de A

Preuve. Soit X fermé de F

$f : A \subset E \longrightarrow F$



Mque $f^{-1}(X)$ fermé de A

Soit $(u_n)_n$ suite de $f^{-1}(X)$

qui converge dans A, on note ℓ sa limite.

$\forall n \quad f(u_n) \in X$

et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$ par continuité de f.

Donc $(f(u_n))_n$ est une suite de X, convergente vers $f(\ell)$

or X est fermé, donc $f(\ell) \in X$

ie $\ell \in f^{-1}(X)$

- On suppose X ouvert

$f : E \longrightarrow F$

$f : A \subset E \longrightarrow F$

Rappel: $(f^{-1}(X))^c = f^{-1}(X^c)$

$$x \in (f^{-1}(X))^c \iff x \notin f^{-1}(X)$$
$$\iff f(x) \notin X$$
$$\iff f(x) \in X^c$$
$$\iff x \in f^{-1}(X^c)$$

X ouvert donc X^c est fermé

or f continue donc $f^{-1}(X^c)$ est un fermé de A

donc $\left(f^{-1}(X)\right)^c$ est un fermé de A

i.e. $f^{-1}(X)$ ouvert de A.

<u>Remarque:</u> c'est un super théorème!

<u>Exemple:</u>

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2+y^2=1\}$$
$$= f^{-1}(\{1\})$$

où $f : (x,y) \longmapsto x^2+y^2$ continue sur $\mathbb{R}^2$

et $\{1\}$ est fermé.

donc A est fermé.

<u>Exemple:</u> $H=\{M\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } \mathrm{tr}(M)=0\}$

$$= \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$$
$$= \mathrm{tr}^{-1}(\{0\}) \qquad \mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\{0\}$ est fermé de $\mathbb{R}$

tr est continue [...] [...45...]

donc H est fermé.

Proposition. Soit f et g deux fonctions continues sur A, à valeurs réelles. Alors, pour tout réel λ :

$$\begin{gathered}\{x \in A,\ f(x) = g(x)\} \text{ et } \{x \in A,\ f(x) = \lambda\} \text{ sont des fermés de } A \\ \{x \in A,\ f(x) \leqslant g(x)\} \text{ et } \{x \in A,\ f(x) \leqslant \lambda\} \text{ sont des fermés de } A \\ \{x \in A,\ f(x) < g(x)\} \text{ et } \{x \in A,\ f(x) < \lambda\} \text{ sont des ouverts de } A\end{gathered}$$

$h^{-1}([0,+\infty[)$ où $h = g - f$ continue

et $[0,+\infty[$ fermé de $\mathbb{R}$

$f^{-1}(]-\infty,\lambda[)$ où f continue

et $]-\infty,\lambda[$ ouvert de $\mathbb{R}$.

2.6 Fonctions lipschitziennes, uniformément continues

Définition. La fonction $f : A \subset E \to F$ est **lipschitzienne** sur A si et seulement s'il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in A,\ \|f(y) - f(x)\|_F \leqslant k\|y - x\|_E$$

Définition. La fonction $f : A \subset E \to F$ est **uniformément continue** sur A si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in A,\ \|y - x\|_E \leqslant \eta \implies \|f(y) - f(x)\|_F \leqslant \varepsilon$$

Proposition.

- Les applications lipschitziennes sont uniformément continues.
- Les applications uniformément continues sont continues.

Proposition. Soit $A \subset E$, avec $A \neq \varnothing$. Alors l'application : $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & d(x,A) \end{array}$ est 1-lipschitzienne.

Continuité de la distance à une partie

$\boxed{\textbf{44.1}}$

Soit A une partie non vide de E espace normé. Montrer que l'application :

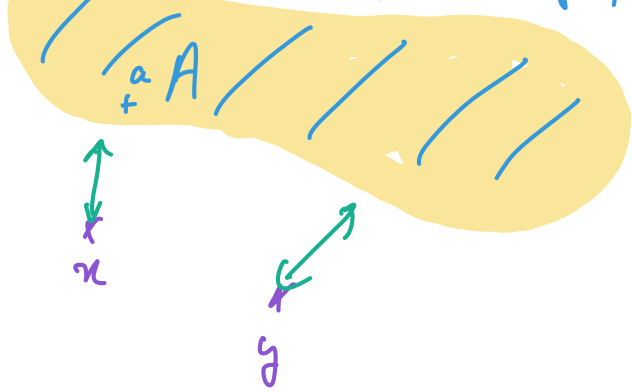
$$x \mapsto d(x,A)$$

est continue sur E.

$$d(\cdot, A) : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

Mqe $\forall x, y \in E$ $\quad |d(x,A) - d(y,A)| \leq \|x-y\|$

$$d(x,A) = \mathrm{Inf}\,\{\|x-a\|,\ a \in A\}$$



Soit $x, y \in E$

Mqe $\quad d(x,A) - d(y,A) \leq \|x-y\|$

$\forall a \in A$

$$\begin{aligned} d(x,A) &\leq \|x-a\| \\ &= \|x-y+y-a\| \\ &\leq \|x-y\| + \|y-a\| \end{aligned}$$

donc $\forall a \in A \quad \|y-a\| \geq \underbrace{d(x,A) - \|x-y\|}_{\text{indep de } a}$

donc $\inf_{a\in A} \|y-a\| \geq d(x,A) - \|x-y\|$

ie $d(y,A) \geq d(x,A) - \|x-y\|$

donc $\underline{d(x,A) - d(y,A) \leq \|x-y\|}$

De même (par symétrie)

$$d(y,A) - d(x,A) \leq \|x-y\|$$

donc $|d(y,A) - d(x,A)| \leq \|x-y\|$

ie $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne.

<u>Exemple</u>: Mque $\|\cdot\|$ est continue sur $(E, \|\cdot\|)$

(en fait lipschitzienne)

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

Mqe $\exists k$ tq $\forall x,y \in E \quad |\|x\| - \|y\|| \leq k \|x-y\|$

$\forall x,y \in E$, $\quad |\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$

par inég triangulaire inversée.

donc $\|\cdot\|$ est 1-lipschitzienne.

Dans ce chapitre, sauf mention contraire, E et F désigne deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Limite

1.1 Définition, propriétés

Définition. Soit $f : A \subset E \to F$, et $a \in \overline{A}$. On dit que f **a pour limite** b **en** a, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$, lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\|_E \leqslant \eta \implies \|f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon$$

Remarque. *On peut reformuler la définition en termes de boules.* $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ *signifie :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A \cap BF(a, \eta),\ f(x) \in BF(b, \varepsilon)$$

Proposition. La limite de f en a, si elle existe, est unique.

$$\varepsilon = \frac{\|\ell_2 - \ell_1\|}{3}$$

Proposition. L'existence et la valeur de la limite sont inchangées par passage à d'autres normes sur E et F, lorsqu'elles sont équivalentes aux normes initiales.

Soit $\|.\|_E$ et N_1 2 normes de E équivalentes :

$$\exists \alpha, \beta > 0 \text{ tq } \alpha \|.\|_E \leq N_1 \leq \beta \|.\|_E$$

Soit $\|.\|_F$ et N_2 équivalents sur F

$$\exists \gamma, \delta > 0 \text{ tq } \gamma \|.\|_F \leq N_2 \leq \delta \|.\|_F$$

On suppose $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ pour $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$

Mq $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ pour N_1 et N_2

Soit $\varepsilon > 0$ pour avoir $N_2(f(x) - \ell) \leq \varepsilon$

$\Uparrow$

il suffit $\delta \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon$

On applique la déf de $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ pour $\|.\|_E$, $\|.\|_F$

avec $\dfrac{\varepsilon}{\delta}$

d'où l'existence $\eta > 0$ tq $\forall x \in A$

$$\|x-a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x)-\ell\|_F \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$$

pour avoir $\|x-a\|_E \leq \eta$

il suffit d'avoir $N_1(x-a) \leq \cancel{\frac{\eta}{\alpha}}\ \alpha\eta$

Posons $\nu = \cancel{\frac{\eta}{\alpha}}\ \cancel{>0}\ \alpha\eta > 0$

$\forall x \in A$, si $N_1(x-a) \leq \nu$

alors $\|x-a\|_E \leq \frac{1}{\alpha} N_1(x-a)$

$$\leq \frac{1}{\alpha}\cdot \nu$$

$$= \eta$$

donc $\|f(x)-\ell\|_F \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$

donc $N_2(f(x)-\ell) \leq \varepsilon$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$

$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$

$f : E \longrightarrow F$

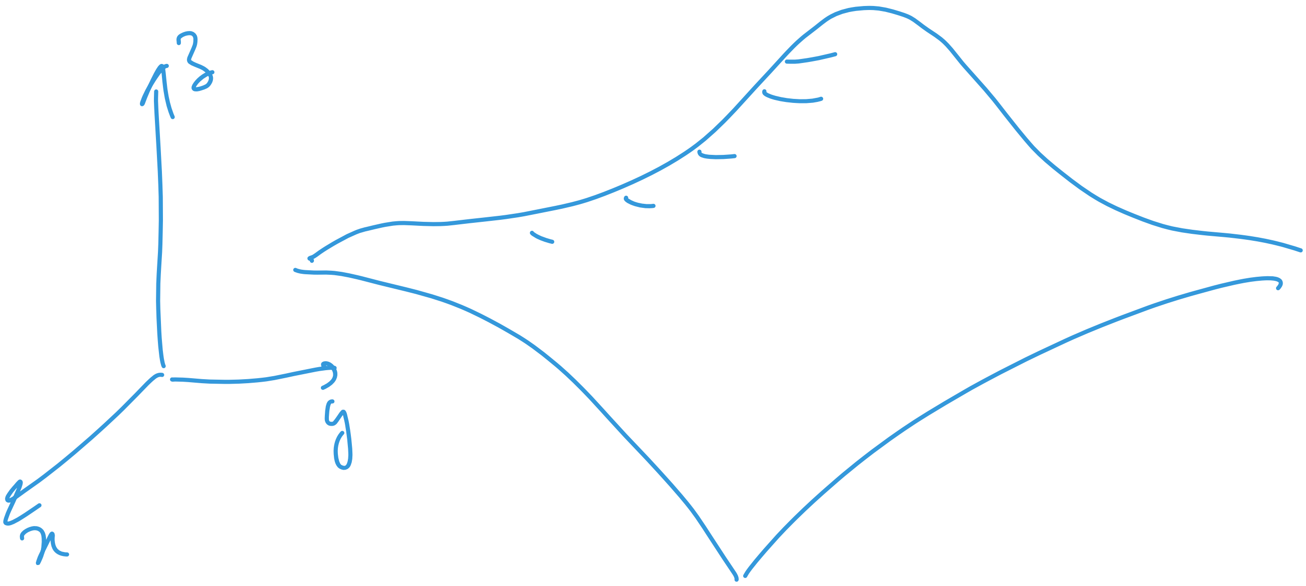
$\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ $\quad$ $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Définition. Soit $f : A \subset E \to F$. On dit que $f(x)$ tend vers 0 lorsque $\|x\| \to +\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} 0_F$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ \|x\| \geqslant M \implies \|f(x)\|_F \leqslant \varepsilon$$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

$\{(x,y,z) \mid z = f(x,y)\}$



1.2 Caractérisation séquentielle

Proposition. Soit $f : A \subset E \to F$, et $a \in \overline{A}$ et $b \in F$. f a pour limite b en a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b.

1.3 Cas particulier de $\mathbb{R}$

Remarque. *Lorsque $E = \mathbb{R}$ on peut envisager les limites lorsque $x \to \pm\infty$, et lorsque $F = \mathbb{R}$, on peut envisager des limites infinies, même s'il serait abusif de dire que $+\infty$ est adhérent à $]-\infty, +\infty[$. On peut donc adapter les définitions vues en première année.*

Définition. Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to F$ une fonction de la variable réelle, où A n'est pas majorée. On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} b$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \geqslant M \implies \|f(x) - b\| \leqslant \varepsilon$$

Définition. Soit $f : A \subset E \to \mathbb{R}$ une fonction numérique réelle, et $a \in \overline{A}$. On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ lorsque :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\| \leqslant \eta \implies f(x) \geqslant M$$

1.4 Opérations sur les limites

Proposition. Soit $f, g : A \subset E \to F$ deux fonctions, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ deux scalaires. Soit $a \in \overline{A}$.

- Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} c$, alors $(\lambda f + \mu g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda b + \mu c$.

$$\|(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda b + \mu c)\|$$

$$\leq |\lambda| \, \|f(x) - b\| + |\mu| \, \|g(x) - c\|$$

$$\xrightarrow[x \to a]{} 0$$

$f : E \longrightarrow F \qquad \varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$

$$\varphi f : E \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto \varphi(x) \cdot \overrightarrow{f(x)}$$

Proposition. Soit $f : A \subset E \to F$ une fonction, $\varphi : A \subset E \to \mathbb{K}$ une fonction numérique. Soit $a \in \overline{A}$.

- Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ et $\varphi(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda$, alors $(\varphi f)(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda b$.
- Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0_F$ et λ bornée au voisinage de a, on écrit :
$$\|\lambda(x) f(x)\| \leqslant M \|f(x)\| \xrightarrow[x \to a]{} 0_{\mathbb{R}}$$
pour conclure que $\lambda(x) f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0_F$.
- Si f est bornée au voisinage de a, $\lambda(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0_{\mathbb{K}}$, on écrit :
$$\|\lambda(x) f(x)\| \leqslant |\lambda(x)| M \xrightarrow[x \to a]{} 0_{\mathbb{R}}$$
pour conclure que $\lambda(x) f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0_F$.

Proposition. Soit $f, g : A \subset E \to \mathbb{K}$ deux fonctions numériques et $a \in \overline{A}$.

- Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} c$, alors $(f \times g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} b \times c$.

Proposition. Soit $f : A \subset E \to F$ et $g : B \subset F \to G$ deux fonctions telles que $f(A) \subset B$. Soit $a \in \overline{A}$ et $b \in \overline{B}$.

- Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ et $g(x) \xrightarrow[x \to b]{} c$, alors $g \circ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} c$.

à écrire.

1.5 Limite par coordonnées, limite des fonctions à valeurs dans un espace produit

Définition. Soit F est un espace vectoriel de dimension finie p, muni d'une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$. Soit $g : A \subset E \to F$. À $x \in A$ fixé, $g(x)$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$g(x) = g_1(x)f_1 + g_2(x)f_2 + \cdots + g_p(x)f_p$$

où $(g_1(x), g_2(x), \dots, g_p(x))$ est le p-uplet des coordonnées de $g(x)$ dans la base $\mathcal{C}$.
Pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$, la fonction numérique g_k est la k**-ème application coordonnée** de g dans la base $\mathcal{C}$.

Théorème.

Avec les notations précédentes, et avec $\ell \in F$ dont les coordonnées sont $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p)$, on a :

$$g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \forall k \in \{1, \dots, p\},\ g_k(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_k$$

Remarque. *Ces dernières limites sont des limites dans $\mathbb{K}$.*

Preuve: On munit F de $\|.\|_\infty$: $\|y\|_\infty = \max_{k=1}^{p} |y_k|$

où $(y_1 \dots y_p)$ coord de y

$\boxed{\Rightarrow}$ $\forall k \quad |g_k(x) - \ell_k| \leq \|g(x) - \ell\| \xrightarrow[x \to a]{} 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $\varepsilon > 0$

Par déf de $g_k(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_k$, $\exists \eta_k > 0$

tq $\forall x \in A \quad \|x - a\| \leq \eta_k \Rightarrow |g_k(x) - \ell_k| \leq \varepsilon$

On note $\eta = \operatorname{Min}(\eta_1 \dots \eta_p)$

$\forall x \in A$, si $\|x - a\| \leq \eta$

alors $\forall k \quad |g_k(x) - \ell_k| \leq \varepsilon$

indep de k

donc $\|g(x) - \ell\|_\infty \leq \varepsilon$

Proposition. Soit $g : A \subset E \to F$ où $F = F_1 \times \cdots \times F_p$. On peut écrire, pour tout $x \in A$:

$$g(x) = \big(g_1(x), \ldots, g_p(x)\big)$$

où les fonctions g_k sont les applications composantes de g.
Pour $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p) \in F$, on a :

$$g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \iff \forall k \in \{1, \ldots, p\},\ g_k(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_k$$

Remarque. *Ces dernières limites sont des limites dans les espaces F_k.*

2 Continuité

2.1 Définition

Définition. Soit $f : A \subset E \to F$ et $a \in A$. On dit que f est **continue en** a lorsque :

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$$

On dit que f est continue sur A lorsque f est continue en tout point de A.

Remarque. *La continuité en un point est une propriété locale.*

$$\|f(x) - f(a)\|_F \xrightarrow[\|x-a\|_E \to 0]{} 0$$

Continuité en a ne dépend que de f au voisinage de a

2.2 Caractérisation séquentielle

Proposition. Soit $f : A \subset E \to F$ et $a \in A$. f est continue en a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

2.3 Opérations sur les fonctions continues

Proposition. Soit $f, g : A \subset E \to F$ deux fonctions, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ deux scalaires et $\varphi : A \subset E \to \mathbb{K}$ une fonction numérique.

- Si f et g sont continues en $a \in A$ (resp. sur A), alors $\lambda f + \mu g$ est continue en a (resp. sur A).
- Si f et φ sont continues en $a \in A$ (resp. sur A), alors $\varphi f : x \mapsto \varphi(x) f(x)$ est continue en a (resp. sur A).

Proposition. Soit $f, g : A \subset E \to K$ deux fonctions numériques.

- Si f et g sont continues en $a \in A$ (resp. sur A), alors $f \times g : x \mapsto f(x)g(x)$ est continue en a (resp. sur A).

Proposition. Soit $f : A \subset E \to F$ et $g : B \subset F \to G$ deux fonctions telles que $f(A) \subset B$.

- Si f est continue en $a \in A$ (resp. sur A) et g est continue en $f(a)$ (resp. sur $f(A)$), alors $g \circ f$ est continue en a (resp. sur A).

2.4 Continuité par coordonnées, continuité des fonctions à valeurs dans un espace produit

Définition. Soit F est un espace vectoriel de dimension finie p, muni d'une base $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_p)$. Soit $g : A \subset E \to F$. À $x \in A$ fixé, $g(x)$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$g(x) = g_1(x)f_1 + g_2(x)f_2 + \cdots + g_p(x)f_p$$

où $(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_p(x))$ est le p-uplet des coordonnées de $g(x)$ dans la base $\mathcal{C}$.
Pour chaque $k \in \{1, \ldots, p\}$, la fonction numérique g_k est la **k-ème application coordonnée** de g dans la base $\mathcal{C}$.

Théorème.

Avec les notations précédentes, g est continue en $a \in A$ si et seulement si les p applications coordonnées g_k sont continues en a.

Proposition. Soit $g : A \subset E \to F$ où $F = F_1 \times \cdots \times F_p$. On peut écrire, pour tout $x \in A$:

$$g(x) = \big(g_1(x), \ldots, g_p(x)\big)$$

où les fonctions g_k sont les applications composantes de g.
La fonction g est continue en $a \in A$ si et seulement si les p applications composantes g_k sont continues en a.

Propriété : E ev de dim finie, $B = (e_1 \ldots e_n)$ bon.

$E \simeq \mathbb{K}^n \simeq \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

$x \longleftrightarrow (x_1, \ldots, x_n) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$p_k : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & x_k \end{array}$$ la k^e coord de x dans B

est continue

preuve : On munit E de la norme $\|x\|_\infty = \max(x_k)$

Soit $a \in E$

Mque p_k continue en a $\quad a \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} |p_k(x) - p_k(a)| &= |x_k - a_k| \\ &\leq \|x-a\|_\infty \\ &\xrightarrow[x \to a]{} 0 \end{aligned}$$

donc $p_k(x) \xrightarrow[x \to a]{} p_k(a)$

Rmq : chap 15 : p_k est linéaire et l'espace de départ est de dim finie, donc p_k continue.

Propriété : Tout polynôme en les coord de x est une fonction continue de x.

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \sum_i \lambda_i \prod_k x_k^{d_{ki}} \end{array}$$

CL de produits de p_k qui sont continues.

$$\operatorname{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$A \longmapsto a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

A cond $\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$

Continue comme polynôme en les coeff de A.

$$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$A \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

polynomiale en les coeff de A

donc continue.

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ tq } \det(M) \neq 0 \}$$
$$= \det^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$$

$$GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[)$$

ouvert comme image réciproque d'un ouvert par det continu.

$\boxed{\text{Ch. 8}}$

$A = \{ (t, \sin t) \,,\ t \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^2$

$= f(\mathbb{R})$

où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longmapsto (t, \sin t)$

image directe d'un fermé par f continue.

$\longrightarrow$ rien.

$|\mathrm{Arctan}|(\mathbb{R}) = [0, \frac{\pi}{2}[$

$A = \{ (x,y) \text{ tq } y - \sin x = 0 \}$

$= f^{-1}(\{0\})$

où $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto y - \sin x$

fermé comme image réciproque de $\{0\}$ fermé par f continue.

Soit $u_n = (n\pi, 0) \in A \quad \forall n$

et $\|u_n\| = n \, \|(\pi, 0)\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

donc A non borné.