Pour lui : ex à rédiger
(au choix)

42.12, 42.13
43.18, 43.19
31.19, 31.20

TIPE → SCEI

4.4 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème de Gram-Schmidt.

Partant d'une famille $(u_1, \dots, u_p)$ supposée libre de E (par exemple une base), il existe une unique famille $(e_1, \dots, e_p)$ telle que :

- $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormée ;
- $\forall k \in \{1, \dots, p\},\ \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$;
- $\forall k \in \{1, \dots, p\},\ \langle e_k, v_k \rangle > 0$.

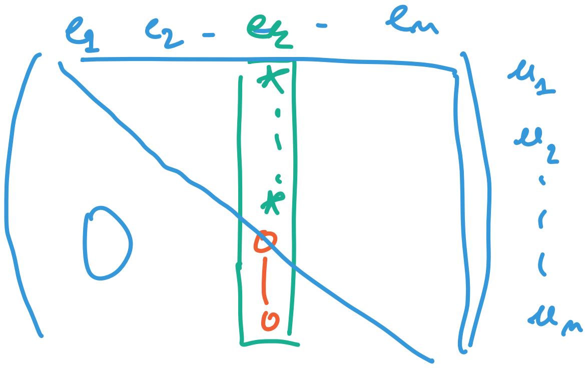
Algorithme. Cette famille peut être construite par l'algorithme suivant : Pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$, on définit $e'_k = u_k - p_{k-1}(u_k)$ (où p_{k-1} désigne la projection orthogonale sur $F_{k-1} = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$) et $e_k = \frac{e'_k}{\|e'_k\|}$. Comme F_{k-1} est connue par une base orthonormée, l'expression de la projection orthogonale est simple.

Remarque. *La matrice de la famille $(e_1, \dots, e_p)$ dans la base $(u_1, \dots, u_p)$ de F_p est triangulaire supérieure.*

$\mathcal{B} = (u_1 \dots u_n)$ base de E

orthonormalisation → $\mathcal{E} = (e_1 \dots e_n)$ base de E

$\mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{E}) =$



$= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E})$

$e_k \in \mathrm{Vect}(e_1 .. e_k) = \mathrm{Vect}(u_1 .. u_k)$

e_k est CL de $e_1 .. e_k$, pas $e_{k+1} .. e_n$

5 Formes linéaires sur un espace euclidien

5.1 Représentation des formes linéaires

Théorème de représentation des formes linéaires. dim finie

Soit φ une forme linéaire sur un espace euclidien E. Alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle a, x \rangle$$

En d'autres termes, en dimension finie, toute forme linéaire peut être représentée à l'aide d'un produit scalaire.

Remarque. *Soit H un hyperplan. Alors il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \operatorname{Ker}\varphi$. On applique à φ le théorème précédent, et on a la définition suivante :*

Définition. Lorsque $H = \operatorname{Ker}\varphi$, où $\varphi \neq 0$, le vecteur a est orthogonal à l'hyperplan $H = \operatorname{Ker}\varphi$. On dit que a est un **vecteur normal** à H.

Remarque. *Les vecteurs orthogonaux à H sont alors les vecteurs colinéaires à a.*

Preuve: Π1

$$u : \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) = E^* \\ a & \longmapsto & \langle a, \cdot \rangle : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \langle a, x\rangle \end{array} \end{array}$$

u est linéaire (car le p.s. est bilinéaire)

$u \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,\mathbb{R}))$

$\dim E = \dim \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ $(= \dim E \times \dim \mathbb{R})$

$a \in \operatorname{Ker} u \iff u(a) = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$

$\iff \forall x \in E \ \langle a, x\rangle = 0$

$\iff a = 0_E$ $\qquad a \in E^\perp = \{0_E\}$

donc u est injectif, et $\dim E = \dim \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$

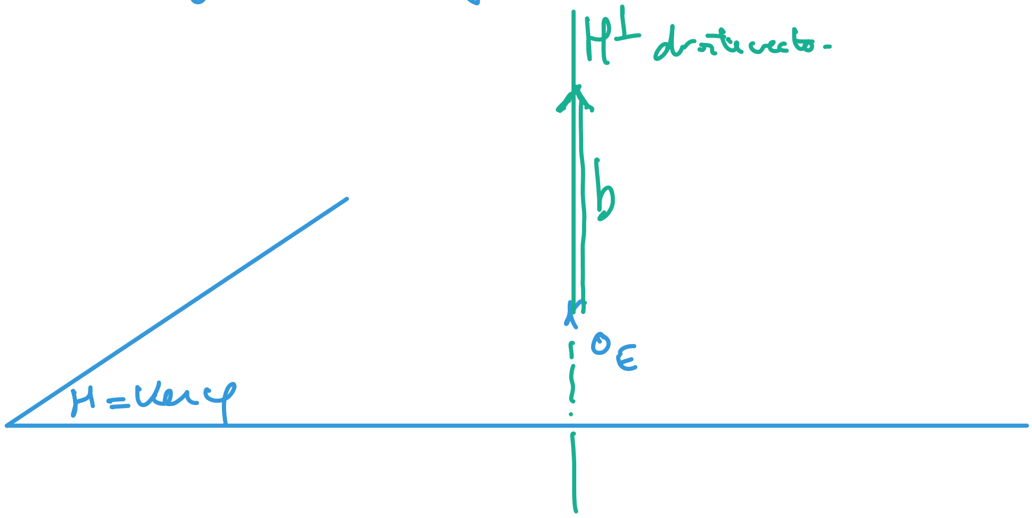
donc u est isomorphisme d'ev.

M2 : Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

- Si $\varphi = 0$, $a = 0$ convient, et c'est le seul.

On suppose $\varphi \neq 0$ pour la suite

- $H = \operatorname{Ker} \varphi$ hyperplan de E comme noyau d'une forme linéaire non nulle.



Analyse : On suppose

$$\exists a \in E \text{ tq } \forall x \in E \quad \varphi(x) = \langle a, x \rangle$$

donc $\forall x \in H$, $0 = \langle a, x \rangle$

donc $a \in H^\perp$.

$H \oplus H^\perp = E$ car E euclidien

et H hyperplan donc $H^\perp = \operatorname{Vect}(b)$

et $a \in H^\perp$: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $a = \lambda b$

$$\varphi(b) = \langle a, b \rangle$$
$$= \lambda \|b\|^2$$

donc $\lambda = \dfrac{\varphi(b)}{\|b\|^2}$

Et donc $a = \dfrac{\varphi(b)}{\|b\|^2} b$ unicité.

Synthèse : Posons $a = \dfrac{\varphi(b)}{\|b\|^2} b$

Si $x \in H^\perp$, $x = \mu b$

$$\varphi(x) = \mu \varphi(b)$$

$$\langle a, x \rangle = \left\langle \frac{\varphi(b)}{\|b\|^2} b, \mu b \right\rangle$$

$$= \frac{\varphi(b)}{\|b\|^2} \mu \langle b, b \rangle$$

$$= \varphi(b) \mu$$

Si $x \in H$, $\varphi(x) = 0$

$$\langle a, x \rangle = \frac{\varphi(b)}{\|b\|^2} \langle b, x \rangle$$

$$= 0 \quad \text{car } b \in H^\perp$$

Or $E = H \oplus H^\perp$

et φ coïncide avec $\langle a, \cdot \rangle$ sur H et $H^\perp$

donc sur E.

Corollaire. On conserve les notations précédentes.

Si E est muni d'une base orthonormée, et que a a pour coordonnées $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, alors une **équation de** H est donnée par :

$$\begin{aligned} x \in H &\iff A^\top X = 0 \\ &\iff a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \end{aligned}$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$\mathbb{R}^2 \to$ droite $\qquad ax + by = 0$

$\mathbb{R}^3 \to$ plan $\qquad ax + by + cz = 0$

$\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \qquad \mathcal{B}$ base o.n. de E

$A = \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}) \qquad (1)$ base de $\mathbb{R}$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi(e_1) & - - - & \varphi(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \cdots & \varphi(e_n) \end{pmatrix} \; 1 \end{array}$$

$\in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$

$\varphi(x) \longleftrightarrow AX$

$\langle a, x \rangle \longleftrightarrow A^\top X$

où $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

5.2 Distance à un hyperplan, à une droite

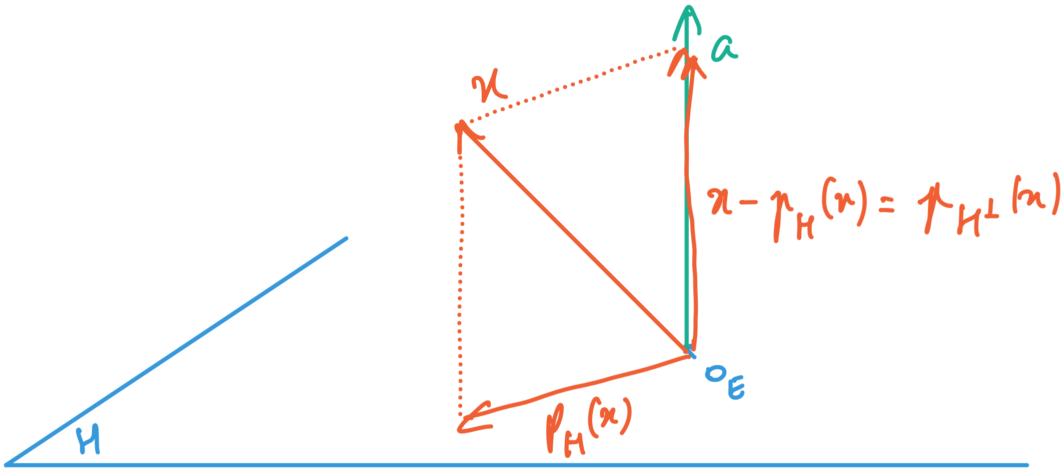
Théorème.

Soit H un hyperplan de E, et a un vecteur normal de H. Alors pour tout $x \in E$, on a :

$$d(x, H) = \frac{|\langle a, x\rangle|}{\|a\|}$$

Soit D un droite vectorielle de E, dirigée par un vecteur a. Alors, pour tout $x \in E$, on a :

$$d^2(x, D) = \|x\|^2 - d^2(x, D^\perp)$$



$$p_{H^\perp}(x) = \left\langle x, \frac{a}{\|a\|} \right\rangle \frac{a}{\|a\|}$$

car $\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$ base o.n de $H^\perp$

donc $d(x, H) = \| p_{H^\perp}(x) \|$

$$= \frac{|\langle x, a\rangle|}{\|a\|}$$