2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs orthogonaux

Définition. Deux vecteurs x et y sont dits **orthogonaux** si et seulement si :

$$\langle x, y \rangle = 0$$

On note dans ce cas : $x \perp y$.

Remarque. *Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de E, et un vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E est nul.*

Pour montrer $x = 0_E$, on peut montrer $\forall y \in E \quad \langle x | y \rangle = 0$

Définition. Une famille $(v_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite **orthogonale** si et seulement si :

$$\forall i, j \in I,\ i \neq j \implies \langle v_i, v_j \rangle = 0$$

Elle est dite **orthonormée** si et seulement si :

$$\forall i, j \in I,\ \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Proposition. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
Toute famille orthonormée est libre.

Soit $(v_i)_{i \in I}$ orthogonale, avec $v_i \neq 0_E$ $\forall i$

Mq $(v_i)_{i \in I}$ libre. $\cancel{\sum_{i \in I} \lambda_i v_i}$ si I infini.

Soit $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$ Mq $(v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$ libre.

Soit $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_{i_k} = 0_E$

Alors : pour tout $j \in \{1 \dots n\}$

$$\langle v_{i_j} \,|\, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_{i_k} \rangle = \langle v_{i_j} \,|\, 0_E \rangle = 0$$

$$\| \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle v_{i_j} \,|\, v_{i_k} \rangle = \lambda_j \underbrace{\| v_{i_j} \|^2}_{\neq 0}$$

donc $\lambda_j = 0$ $\forall j$

Exemple. Les polynômes élémentaires de Lagrange forment une famille libre.

Soit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ 2 à 2 distincts.

$$L_j(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(X - a_i)}{(a_j - a_i)} \in \mathbb{R}_n[X]$$

$$L_j(a_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

libre

$(n+1)$ vecteurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

générateur.

On munit $\mathbb{R}_n[X]$ d'une structure préhilbertienne.

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)\, Q(a_i)$$

$$\langle P, P \rangle = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)^2$$

c'est une forme bilinéaire symétrique positive et définie positive.

$$\langle L_i, L_j \rangle = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)\, L_j(a_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \delta_{ik}\, \delta_{jk}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Donc $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ orthonormée, donc libre.

donc base orthonormée.

Théorème de Pythagore.

x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Cas d'une famille finie de vecteurs. Si $(v_1, \ldots, v_p)$ est une famille orthogonale, alors $\left\| \sum_{i=1}^{p} v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|v_i\|^2$.

- $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$

$$\langle x, y\rangle = 0 \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

- $(v_1, \ldots, v_p)$ orthogonale

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} v_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{p} v_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{p} v_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \left\langle v_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{p} v_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \langle v_i, v_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \|v_i\|^2 + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{=0}$$

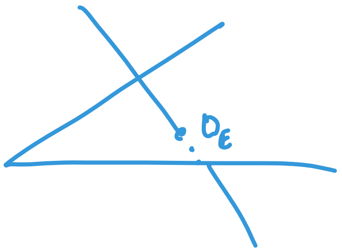
$$= \sum_{i=1}^{p} \|v_i\|^2$$

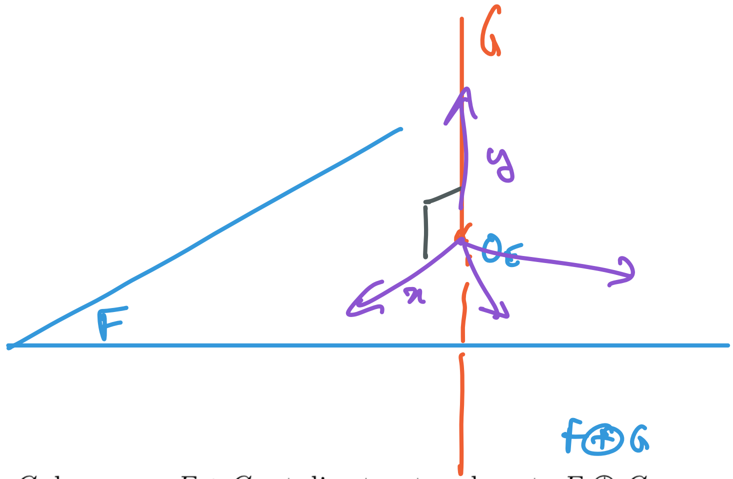
2.2 Sous-espaces orthogonaux

Définition. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit qu'ils sont **orthogonaux** si et seulement si :

$$\forall x \in F,\ \forall y \in G,\ x \perp y$$

On note $F \perp G$.





Proposition. Lorsque $F \perp G$, la somme $F + G$ est directe, et on la note $F \overset{\perp}{\oplus} G$.

"Somme directe orthogonale".

Proposition. Si $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une famille de sous-espaces deux à deux orthogonaux, alors leur somme est directe et on la note $\overset{\perp}{\bigoplus}_{i=1}^{p} F_i$.

Écrire $H = F \oplus G$ signifie $H = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$

Écrire $H = F \overset{\perp}{\oplus} G$ signifie $H = F + G$ et en plus $F \perp G$

et F, G sont directe

Preuve : Soit $(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p$

tq $x_1 + \dots + x_p = 0_E$

$$\forall k \in \{1, \dots, p\} \quad 0 = \langle x_k, 0_E \rangle$$
$$= \langle x_k, \sum_{i=1}^{p} x_i \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \langle x_k \mid x_i \rangle$$
$$= 0 \dots + \langle x_k, x_k \rangle + 0 \dots + 0$$

car $F_k \perp F_i \ \forall i \neq k$

donc $\|x_k\|^2 = 0$ donc $x_k = 0$

2.3 Sous-espace orthogonal d'une partie

Définition. Soit A une partie de E. On appelle **orthogonal de** A l'ensemble :

$$A^\perp = \{x \in E \text{ t.q. } \forall a \in A,\ x \perp a\}$$

$$x \in A^\perp \iff \forall a \in A,\ x \perp a$$

Exemple. $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.

Proposition. Soit A une partie de E espace préhilbertien.

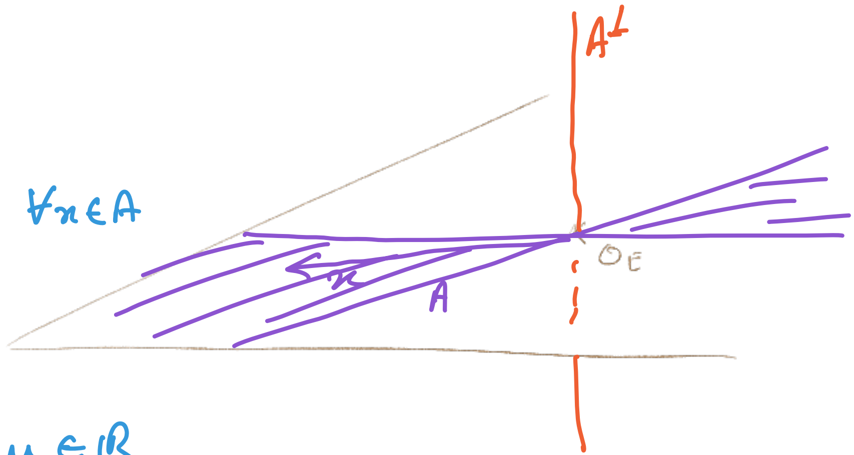
- $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E
- Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$
- $A \perp B$ signifie que $A \subset B^\perp$ et $B \subset A^\perp$.

Remarque. *Pour la dernière propriété, penser à deux droites dans l'espace usuel de dimension 3.*

Preuve:

* $A^\perp \subset E$

* $0_E \in A^\perp$ car $0_E \perp x \ \forall x \in A$



* Soit $x, y \in A^\perp$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Mq $\lambda x + \mu y \in A^\perp$

$$\forall a \in A,\ \langle \lambda x + \mu y, a \rangle = \lambda \langle x, a \rangle + \mu \langle y, a \rangle$$
$$= \lambda 0 + \mu 0$$
$$= 0$$

M2 : $A^\perp = \bigcap_{a \in A} \mathrm{Ker}(\langle \cdot, a \rangle)$

noyau de formes linéaires

$\langle \cdot, a \rangle : x \longmapsto \langle x, a \rangle$

Mq Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$:

On suppose $A \subset B$

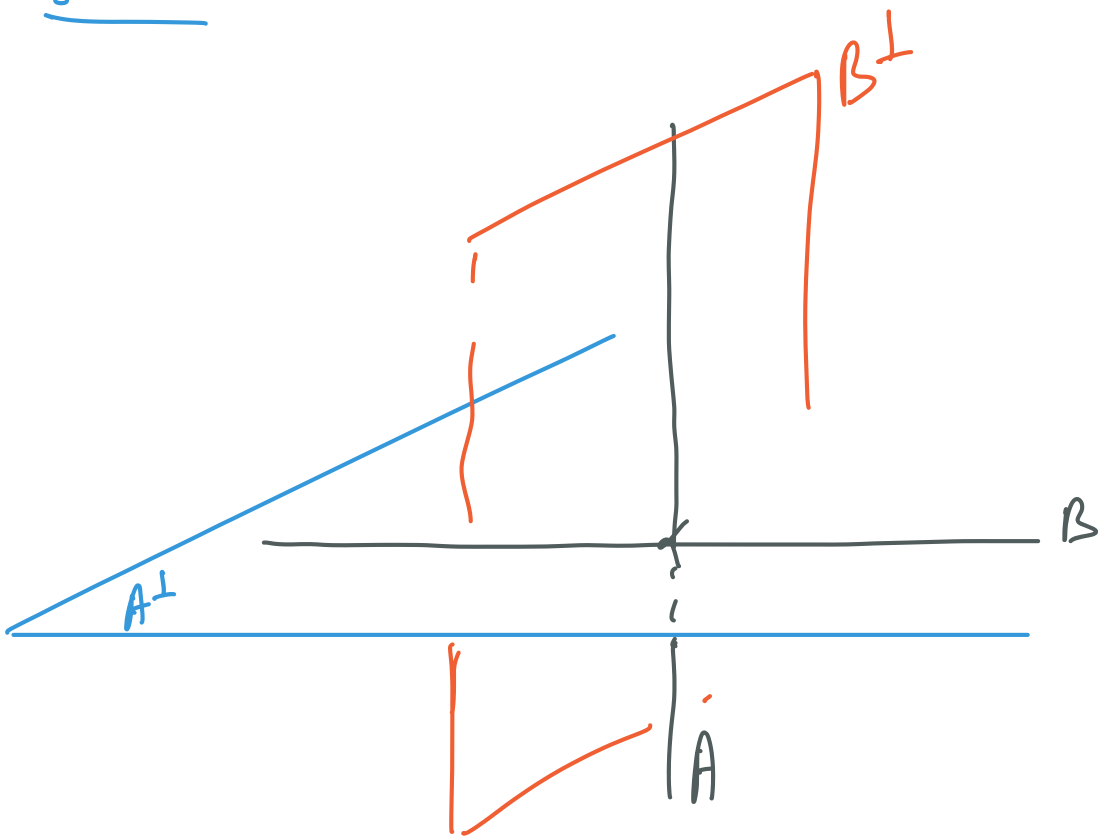
Soit $x \in B^\perp$

Mq que $x \in A^\perp$

Soit $a \in A$ qcq

On a alors $a \in B$ donc $x \perp a$ car $x \in B^\perp$

Bref : $x \in A^\perp$



2.4 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

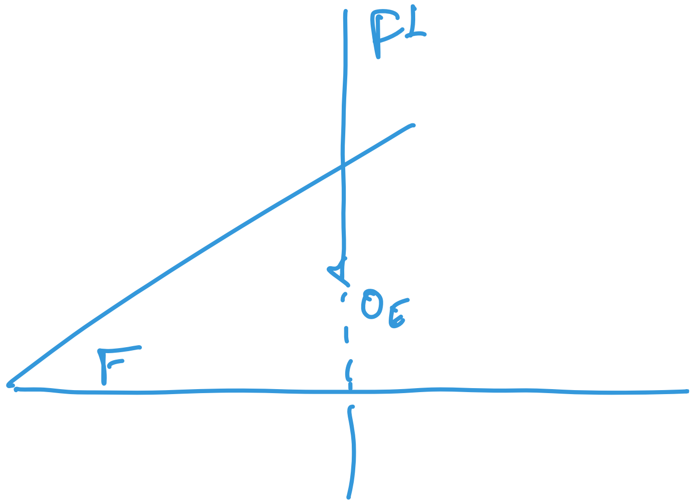
Proposition. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $F^\perp$ est orthogonal à F :

$$F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$$

mais, en général, $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp \subsetneq E$.

Exemple. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, et F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales. Déterminer $F^\perp$.

Remarque. *On verra au § 4 que, lorsque F est de dimension finie (en particulier dans un espace euclidien), $F^\perp$ et F sont supplémentaires.*



$\leftarrow$ Ici $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = \mathbb{R}^3$

$E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ $\qquad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$

$F =$ fct polynomiales

$F^\perp$?

Analyse : Soit $f \in F^\perp$. $\qquad \forall P \in F \quad \langle f, P \rangle = 0$

f continue sur $[0,1]$ segment, donc par le th de Weierstrass, $\exists (P_n)_n$ suite de F tq $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$ ie $\|P_n - f\|_\infty^{[0,1]} \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle$$
$$= \left| \underbrace{\langle f, P_n \rangle}_{\substack{= 0 \\ \text{car } f \in F^\perp \text{ et } P_n \in F}} + \langle f, f - P_n \rangle \right|$$

$$= \left| \int_0^1 f(t)\,\big(f(t) - P_n(t)\big)\,dt \right|$$

$$\le \int_0^1 |f(t)|\,|f(t) - P_n(t)|\,dt$$

$$\le \|f - P_n\| \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

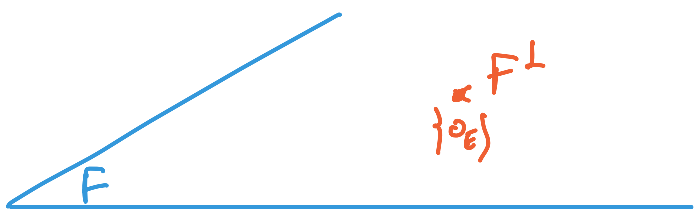
$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $\|f\|_2^2 = 0$ donc $f = 0$

<u>Ainsi</u>: $F^\perp \subset \{0_E\}$

<u>Synthèse</u>: $0_E \in F^\perp$

$F \subsetneq E$ et $F^\perp = \{0_E\}$



3 Bases orthonormées d'un espace euclidien

Dans cette section, E est un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

3.1 Existence de bases orthonormées

Définition. On appelle **base orthonormée** de E toute base de E qui soit aussi une famille orthonormée.

Proposition. Toute famille orthonormée de n vecteurs, lorsque $n = \dim E$, est une base orthonormée.

Théorème.

Tout espace euclidien admet au moins une base orthonormée.

Remarque. *On verra au § 4.4 un algorithme de construction d'une telle base.*

Preuve : par récurrence sur dim E

* pour $n=0$, $()$ est base orthonormée.

* pour $n=1$, E est une droite vecto : $\mathrm{Vect}(x)$ où $x \neq 0_E$.

  Alors $\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ est base orthonormée de E.

* On suppose que tout espace de dim n admet une base orthonormée.

  Soit E un espace euclidien de dim $(n+1)$.

  Prenons $a \in E$, $a \neq 0_E$.

  Posons $e_{n+1} = \frac{a}{\|a\|}$.

  Notons $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$

  $x \longmapsto \langle a, x \rangle$

  φ est une forme linéaire par bilinéarité de $\langle \cdot , \cdot \rangle$

  non nulle car $\varphi(a) = \langle a, a \rangle = \|a\|^2 \neq 0$
  car $a \neq 0$

On note $H = \ker \varphi$

c'est un hyperplan

donc H est de dim n.

On applique à H l'H.R :

$\exists (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée de H.

<u>Posons</u> : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$

$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1 \dots n\}\ j \neq i$

$\langle e_i, e_i \rangle = 1$ par HR

$$\langle e_i, e_{n+1} \rangle = \frac{1}{\|a\|} \langle e_i, a \rangle$$
$$= \frac{1}{\|a\|} \varphi(e_i)$$
$$= 0 \text{ car } e_i \in H = \ker \varphi.$$

$\langle e_i, e_j \rangle = 0$ par HR

$\langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle = 1$

donc $\mathcal{B}$ est orthonormée à $(n+1)$ vecteurs

donc base de E.

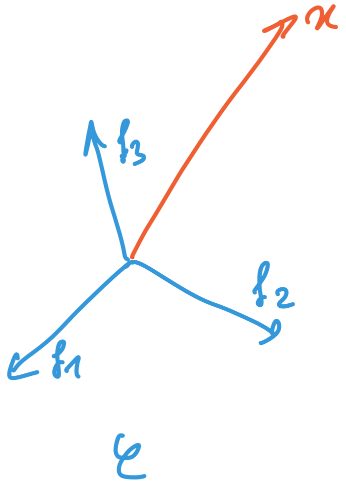
- En conclusion, tout espace euclidien admet une base orthonormée.

3.3 Coordonnées dans une base orthonormée

Proposition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, et x un vecteur de E. Ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont : $\begin{pmatrix} \langle e_1, x\rangle \\ \vdots \\ \langle e_n, x\rangle \end{pmatrix}$, c'est-à-dire :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle e_i$$

Remarque. *Si la base n'est qu'orthogonale, il faut adapter la formule en normant les vecteurs.*
Si la base n'est pas orthonormée, il n'y a pas d'expression simple des coordonnées à l'aide du produit scalaire.



$\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ base de E

$x = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3$

(x_1, x_2, x_3) triplet des coord.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ matrice colonne des coord.

$E \xrightarrow{\text{isom}} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$x \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}(x, \mathcal{C})$

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée de E, $x \in E$ les coord de x sont $\begin{pmatrix} \langle x | e_1\rangle \\ \vdots \\ \langle x | e_n\rangle \end{pmatrix}$

On accède aux coord sans résoudre de système.

Preuve: On note $x_1 \dots x_n$ les coord de x,

ie $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

Alors $\langle x, e_k\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, e_k\rangle$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i \langle e_i, e_k\rangle$

$= x_k$

On travaille en base orthonormée $\mathcal{B}$

$$\begin{array}{ccc} E & & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ x & \longleftrightarrow & X = \mathrm{Mat}(x, \mathcal{B}) \\ y & & Y \\ \langle x, y \rangle & = & X^T Y \end{array}$$

p.s. canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$(\quad) \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

Rmq :

Parfois, un exercice s'énonce :

" Soit E un espace euclidien, muni de $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ base orthonormée.... "

Ici, le produit scalaire est implicitement donné.

Le calcul de $\langle x, y \rangle$ est $X^T Y$

où $X = \mathrm{Mat}(x, \mathcal{B})$

$Y = \dots y$

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, x et y deux vecteurs dont les coordonnées sont respectivement $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors :

$$\langle x, y \rangle = X^\top Y \qquad\qquad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{X^\top X} \qquad\qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Remarque. *On voit ici l'avantage des bases orthonormées : les formules de calcul du produit scalaire et de la norme sont celles du produit scalaire et de la norme canonique de* $\mathbb{R}^n$.

Proposition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $M = (m_{ij})_{ij}$ la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$. Alors, pour tout i, j :

$$m_{ij} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$$

$\mathcal{B}$ base orthonormée

$$E \longleftrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{L}(E) \longleftrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$u \longleftrightarrow \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = M.$$

$$M = \begin{array}{cc} \begin{matrix} u(e_1) & \cdots & u(e_j) & \cdots & u(e_n) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & \boxed{} & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ i \; e_i \\ \\ e_n \end{matrix} \end{array}$$

le coeff i,j est la coord selon e_i de $u(e_j)$

car $\mathcal{B}$ base orthonormée, donc c'est $\langle u(e_j), e_i \rangle$

Pour vue : 31.1, 31.3, 31.23

4 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

4.2 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E. On appelle **projection orthogonale sur** F, et on note p_F, la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque. *Rappelons que, par définition, $p_F(x)$ est l'unique vecteur y tel que :*

$$\begin{cases} y \in F \\ y - x \in F^\perp \end{cases}$$

Ceci fournit une méthode de détermination de $p_F(x)$ par résolution d'un système linéaire lorsque l'on connaît une famille génératrice de F.

Remarque. *On a supposé F de dimension finie, mais si F est de dimension infinie et que $F \oplus F^\perp = E$, alors la projection orthogonale est bien définie.*

Proposition. Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée de F, alors :

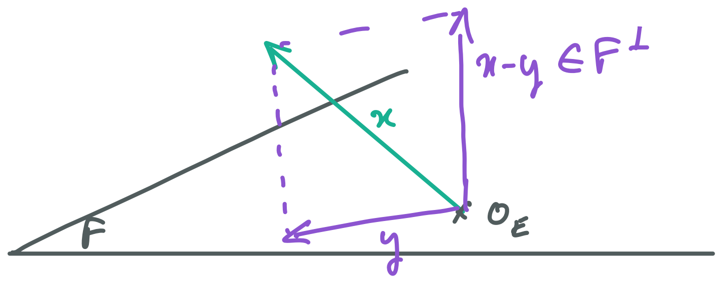
$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, x \rangle e_i$$

Remarque. *Ceci fournit une seconde méthode de détermination de $p_F(x)$, lorsque l'on connaît une base orthonormée de F.*

Théorème : Soit F sous-ev de dimension finie de E préhilbertien.

Pour tout $x \in E$, il existe un unique y tq

$y \in F$ et $x - y \in F^\perp$



Preuve : Soit $\mathcal{B} = (e_1, .., e_p)$ base orthonormée de F.

Analyse

On suppose qu'il existe $y \in F$ tq $x - y \in F^\perp$

$$y = \sum_{i=1}^{p} y_i e_i$$

$\forall j \quad (x-y) \perp e_j \qquad$ car $x-y \in F^\perp$, $e_i \in F$

donc $\quad \langle x - \sum_{i=1}^{p} y_i e_i \mid e_j \rangle = 0$

$$\| $$

$$\langle x, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{p} y_i \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{\delta_{ij}}$$

$$\| $$

$$\langle x, e_j \rangle - y_j \, 1$$

Donc $y_j = \langle x, e_j \rangle$

Donc $\quad y = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i \qquad$ (unicité)

Synthèse : On pose $y = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$

$$\in F = \mathrm{Vect}(e_1 \dots e_p)$$

$$\langle x - y, e_j \rangle = [\dots]$$

$$= 0 \quad \forall j$$

donc $\quad x - y \in (\mathrm{Vect}(e_1 \dots e_p))^\perp = F^\perp$

Conséquence :

Si E préhilbertien, F sous-ev de dim finie

alors $\quad F \oplus F^\perp = E$

(on appelle $F^\perp$ "le supplémentaire orthogonal de F")

On peut définir la <u>projection orthogonale sur F</u>

$$p_F : E \longrightarrow E \qquad p_F \in \mathcal{L}(E)$$

$$x \longmapsto \text{l'unique } y \in F \text{ tq } x = \underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{(x-y)}_{\in F^\perp}$$

C'est la projection sur F, de direction $F^\perp$

<u>Encore mieux</u> !

Si $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_p)$ base orthonormée de F,

$$\boxed{p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i}$$

<u>Corollaire</u> : Si E euclidien

F sous-ev de E

<u>Alors</u> $F^\perp$ est "<u>le supplémentaire orthog de F</u>"

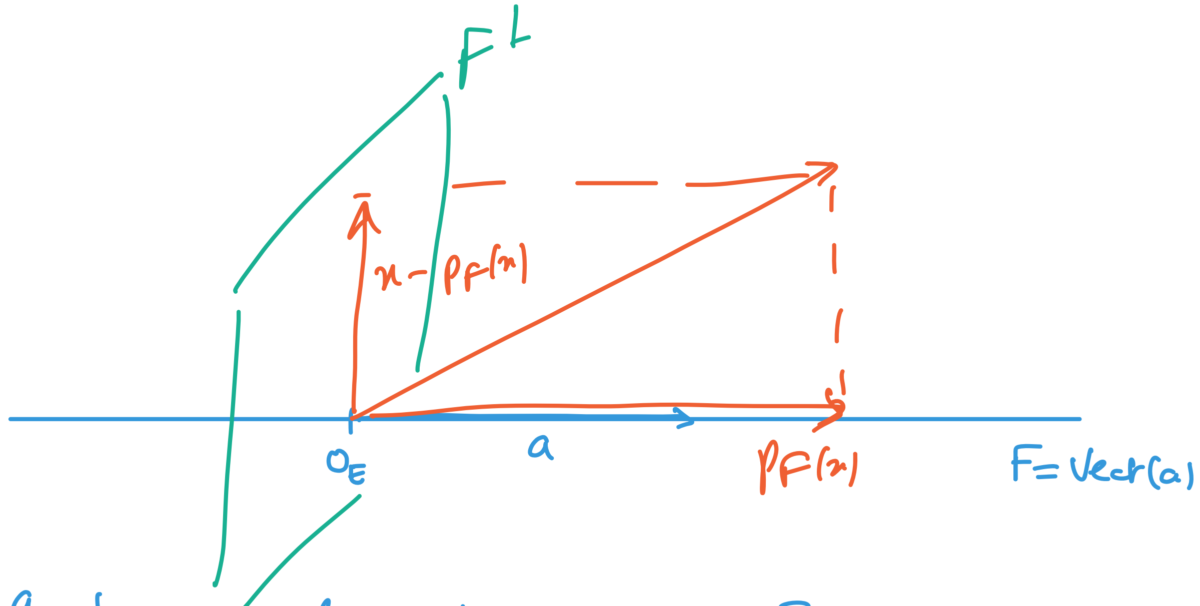
et $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.

<u>Remarque</u> : on a vu des exemples où $F^\perp = \{0_E\}$

dans ce cas, on ne peut pas parler de proj. orthogonale sur F.

dim finie ? ou pas ?

Exemple. Soit $a \in E$ un vecteur non nul. Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(a)$, et celle sur $\mathrm{Vect}(a)^{\perp}$.



$\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$ est une base orthonormée de F

donc $\forall x \in E$, $p_F(x) = \left\langle x, \frac{a}{\|a\|} \right\rangle \frac{a}{\|a\|}$

$$= \frac{\langle x, a\rangle a}{\|a\|^2}$$

Notons $G = (\mathrm{Vect}(a))^{\perp} = F^{\perp}$

Comme F est de dim finie, $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$

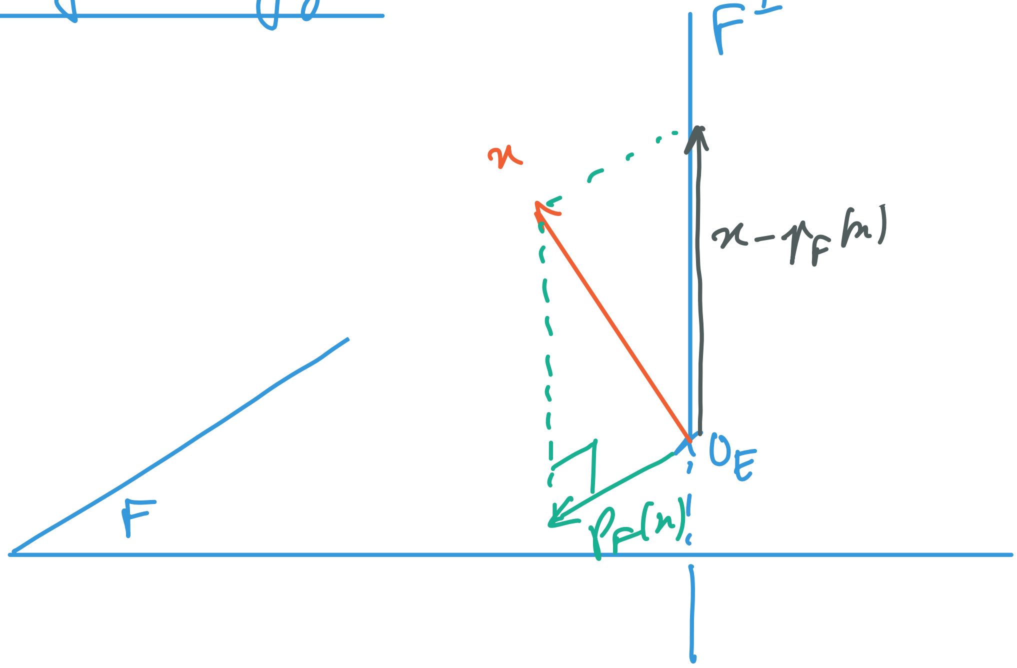
donc la proj. orthog sur G est la projection sur G de direction F.

$$p_G(x) = x - p_F(x)$$

$$= x - \frac{\langle x, a\rangle a}{\|a\|^2}$$

Remarque :

Savoir faire une figure :



Remarque : Si F est de dim finie, $F \oplus F^\perp = E$

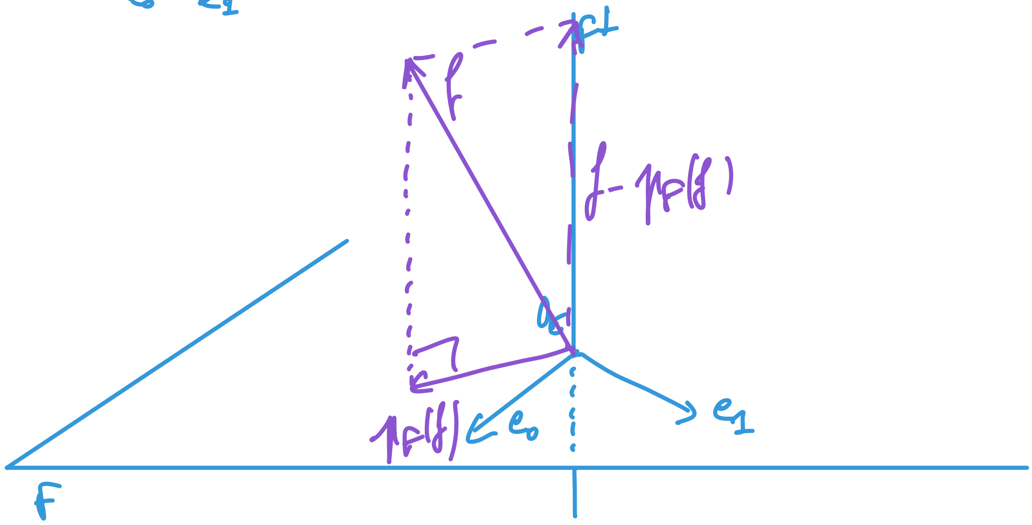
donc p_F est bien définie

Parfois, F n'est pas de dim finie.

Pour parler de p_F projeté orthogonal,

il faut d'abord avoir $F \oplus F^\perp = E$

Exemple. Dans $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer le projeté orthogonal de $\underbrace{t \mapsto t^2}_{f}$ sur $F = \text{Vect}(\underbrace{t \mapsto 1}_{e_0}, \underbrace{t \mapsto t}_{e_1})$.



$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$

On cherche $g = p_F(f)$.

$$g = p_F(f) \iff \begin{cases} g \in F \\ f-g \in F^\perp \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \exists a,b \in \mathbb{R} \text{ tq } g = ae_0 + be_1 \\ f-g \perp e_0 \\ f-g \perp e_1 \end{cases}$$

$$\iff \exists a,b \text{ tq } g = ae_0 + be_1$$

$$\text{et } (*) \begin{cases} \int_0^1 (t^2 - a - bt)\,1\,dt = 0 \\ \int_0^1 (t^2 - a - bt)\,t\,dt = 0 \end{cases}$$

$$(*) \iff \begin{cases} a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{3} \\ b = 1 \end{cases} \quad 12L_2 - 6L_1$$

$$\iff \begin{cases} a = -\frac{1}{6} \\ b = 1 \end{cases}$$

<u>Ccl</u> : $p_F(f) = t \mapsto -\frac{1}{6} + t$

4.3 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

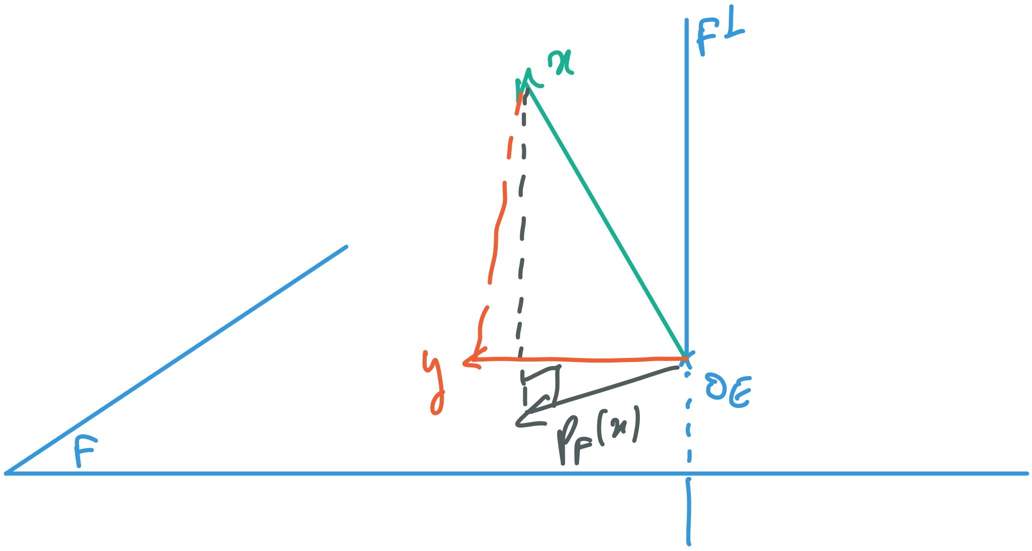
~~Définition~~. Rappel Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $x \in E$. On appelle **distance de x à F** la quantité :

$$d(x, F) = \operatorname*{Inf}_{y \in F} \|x - y\|$$

Théorème.

> Si F est de dimension finie, alors le projeté orthogonal de x sur F est l'unique vecteur de F qui réalise la distance précédente :
> C'est l'unique $y_0 \in F$ tel que :
> $$\|x - y_0\| = \operatorname*{Min}_{y \in F} \|x - y\|$$
> Ainsi :
> $$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}$$

$d(x, F)$?



$$\boxed{d(x, F) = d(x, p_F(x))}$$

$\forall y \in F$, $\|y - x\|^2 = \|\underbrace{y - p_F(x)}_{\in F} + \underbrace{p_F(x) - x}_{\in F^\perp}\|^2$

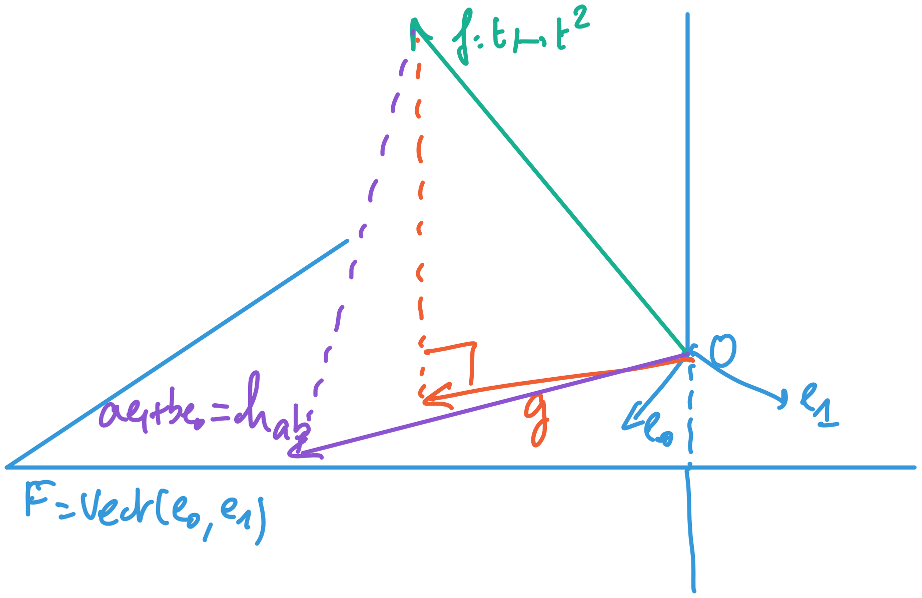
$= \|y - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - x\|^2$

$\geqslant \|p_F(x) - x\|^2$

avec égalité ssi $\|y - p_F(x)\|^2 = 0$ ie $y = p_F(x)$

Exemple. Justifier l'existence et déterminer :

$$\operatorname*{Inf}_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \,\mathrm{d}t$$



$$\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \,dt = \| (t \mapsto t^2) - (t \mapsto at+b) \|^2$$

$$= \| f - h_{ab} \|^2$$

La borne inf proposée existe (inf partie non vide minorée par 0 de $\mathbb{R}$) et c'est

$$d(f, \mathrm{Vect}(e_0, e_1))^2$$

$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ $\quad$ $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$

$\|f\|^2 = \int_0^1 f(t) f(t)\,dt$

$$= \| f - p_F(f) \|^2$$

$$= \| f - (e_1 - \tfrac{1}{6} e_0) \|^2$$

$$= \int_0^1 \left(t^2 - t + \tfrac{1}{6}\right)^2 dt$$

$$= \int_0^1 t^4 + t^2 + \tfrac{1}{36} - 2t^3 + \tfrac{1}{3}t^2 - \tfrac{1}{3} t \,dt$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{36}-\overset{\shortparallel}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{9}-\frac{1}{6} = [\dots]$$

<u>Remarque</u>: Lorsque l'on recherche Inf (---.) souvent, c'est le calcul d'une distance d'un vecteur à un sous-espace de dim finie, pour un produit scalaire bien choisi.

C'est donc un calcul de projection orthog.

(Faire une figure!)

<u>Remarque</u>. La preuve avec Pythagore à bien comprendre.

4.1 Théorème de la base orthonormée incomplète

Théorème de la base orthonormée incomplète.

Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille orthonormée de E euclidien de dimension n, on peut la compléter en une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de E.

Preuve :

On note $F = \text{Vect}(e_1 \ldots e_p)$

On considère $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ base orthonormée de $F^\perp$

F de dim finie donc $F \oplus F^\perp = E$

4.4 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

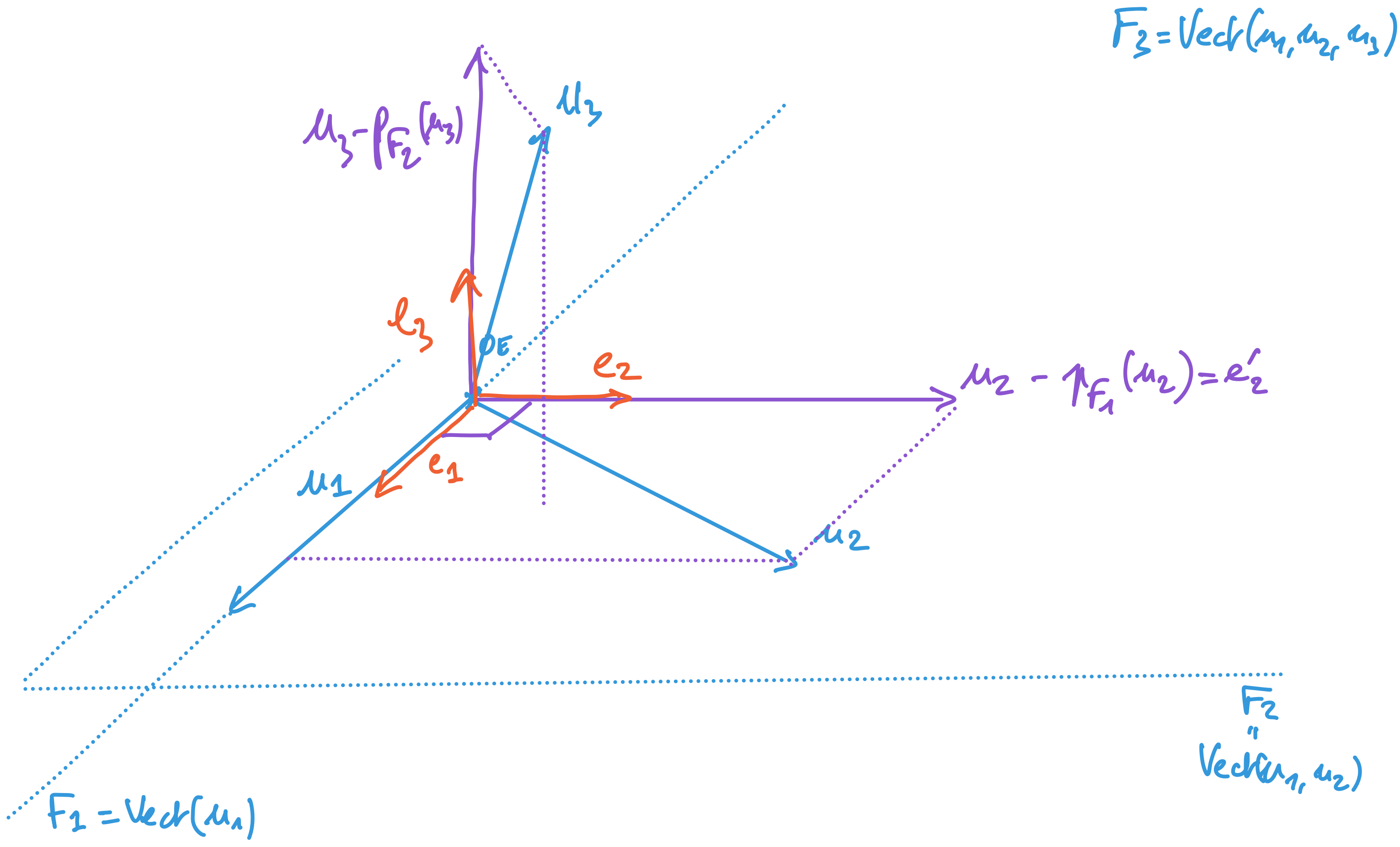
Théorème de Gram-Schmidt.

Partant d'une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ supposée libre de E (par exemple une base), il existe une unique famille $(e_1, \ldots, e_p)$ telle que :

- $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthonormée ;
- $\forall k \in \{1, \ldots, p\},\ \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$;
- $\forall k \in \{1, \ldots, p\},\ \langle e_k, v_k \rangle > 0$.

Algorithme. Cette famille peut être construite par l'algorithme suivant : Pour chaque $k \in \{1, \ldots, p\}$, on définit $e'_k = u_k - p_{k-1}(u_k)$ (où p_{k-1} désigne la projection orthogonale sur $F_{k-1} = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{k-1})$) et $e_k = \frac{e'_k}{\|e'_k\|}$. Comme F_{k-1} est connue par une base orthonormée, l'expression de la projection orthogonale est simple.

Remarque. *La matrice de la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ dans la base $(u_1, \ldots, u_p)$ de F_p est triangulaire supérieure.*



$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$

$e'_2 = u_2 - p_F(u_2)$

ou $e_1 = \cancel{\frac{u_1}{\|u_1\|}}$

$e_2 = \frac{e'_2}{\|e'_2\|}$

$\langle u_1, e_1 \rangle > 0$

Cool! $p_{F_k}(u_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} \langle u_{k+1} \mid e_i \rangle e_i$

$$e_{k+1} = \frac{u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle u_{k+1} | e_i \rangle e_i}{\left\| u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle u_{k+1} | e_i \rangle e_i \right\|}$$