Pour jè : 31.22 (a), 31.18 (a), 43.25 (a,b)

$\boxed{\textbf{43.25}}$

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ est $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$.

(a) Montrer que F est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

(b) Montrer que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

Espaces préhilbertiens réels

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1 Produit scalaire et norme associée

1.1 Produit scalaire

Définition. On appelle **produit scalaire** sur E une forme bilinéaire, symétrique, positive et définie-positive sur E, c'est-à-dire, en notant φ cette application :

- existence
- φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- φ est linéaire par rapport à chacune de ses deux variables ;
- $\forall x, y \in E,\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$;
- $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geqslant 0$;
- $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) = 0 \implies x = 0$.

Remarque. *La symétrie et la linéarité par rapport à l'une des variables suffit à justifier la bilinéarité.*

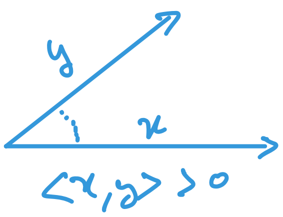
Notation. On note en général $\langle x, y\rangle$, $(x|y)$ ou $x \cdot y$ le produit scalaire de x avec y.

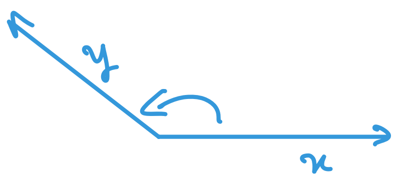
Définition. Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire, s'appelle un **espace préhilbertien**. S'il est en plus de dimension finie, on dit que c'est un **espace euclidien**.

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \varphi(x,y)$$

$\forall x, y_1, y_2, \lambda_1, \lambda_2,\ \varphi(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 \varphi(x, y_1) + \lambda_2 \varphi(x, y$

$\forall x_1, x_2, y, \lambda_1, \lambda_2\ \ \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 \varphi(x_1, y) + \lambda_2\ \varphi(x_2,$





$\langle x, y\rangle < 0$

1.2 Exemples de référence

Remarque. *Les exemples de cette section figurent explicitement au programme, et peuvent donc être utilisés directement.*

Définition. Sur $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$.

$\mathbb{R}^3$ $\quad \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = xx' + yy' + zz'$$

$$\langle x, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

$$\geq 0 \qquad \text{(somme de réels carrés)}$$

Extension : On pourrait définir sur $\mathbb{C}^n$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$

$$\langle x, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{x_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$$

$$\geq 0$$

Définition. Sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est défini par :

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^\top B)$$

Si $A = (a_{ij})_{ij}$ et $B = (b_{ij})_{ij}$, on a de plus l'expression :

$$\langle A, B\rangle = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij}b_{ij}$$

Il s'agit donc de la somme des produits terme à terme des deux matrices.

<u>Preuve:</u> Cas $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

• Montrons d'abord $\operatorname{tr}(A^T B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$

$$\operatorname{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^{n} [A^T B]_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [A^T]_{ij} [B]_{ji}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} [A]_{ij} [B]_{ij}$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$$

Cool : Somme des produits coef à coef.

<u>Montrons que c'est un produit scalaire.</u>

• C'est une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car

* la trace est une forme linéaire
* la transposée est linéaire
* le produit matriciel est bilinéaire.

• $\langle B, A\rangle = \operatorname{tr}(B^T A)$

$$= \mathrm{tr}\left(\left(B^T A\right)^T\right)$$ car les coeff diag sont inchangés

$$= \mathrm{tr}\left(A^T B\right)$$

$$= \langle A, B \rangle$$

(Autre idée : $\langle A, B\rangle = \sum a_{ij} b_{ij} = \sum b_{ij} a_{ij}$)

- positivité :

$$\langle A, A \rangle = \mathrm{tr}\left(A^T A\right)$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq 0$$

- défini-positif :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose $\langle A, A\rangle = 0$

i.e. $\sum_{i,j} a_{ij}^2 = 0$

somme nulle de termes positifs

donc $\forall i, j \quad a_{ij}^2 = 0$

i.e. $A = 0$

Remarque : $E_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} & j & \\ & | & \\ & 1 & \end{pmatrix}$:

$(E_{ij})^T = E_{ji}$ $\qquad [E_{ij}]_{a,b} = \begin{vmatrix} 0 & \text{si} \dots \\ 1 & \text{si} \dots \end{vmatrix}$

$E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$

Définition. Sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $\sim \mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle X, Y\rangle = X^\top Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Remarque. *Il coïncide avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, via l'identification usuelle entre une matrice colonne et un n-uplet.*

On trouve parfois la définition $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(X^\top Y)$. En effet, on a $X^\top Y \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. La trace permet ici d'en faire un réel plutôt qu'une matrice 1×1. On accepte cependant souvent de confondre $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

$X \left(\right) \quad Y \left(\right)$

$X^\top \left(\quad \right)$

$X^\top Y = \left(\quad \right) \left(\right) = \left(\right) \in \mathcal{M}_{11}(\mathbb{R})$

$\in \mathbb{R}$

Définition. Sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

[. . .]

1.3 Autres exemples

Remarque. *Même s'ils sont très classiques, les exemples de cette section ne figurent pas explicitement au programme.*

Exemple. En confondant polynôme et fonction polynomiale associée, $\mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple. Toujours sur $\mathbb{R}[X]$, montrer que

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

définit un produit scalaire.

- Existence

$t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ continue (par mcx) sur $[0,+\infty[$

Au voisinage de $+\infty$, $P(t)Q(t)e^{-t} = o(e^{t/2})e^{-t}$

$= o(e^{-t/2})$

intégrable en $+\infty$

- $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$

- Montrons la bilinéarité

$\boxed{M1}$ Soit $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda P + \mu Q, R\rangle = \int_0^{+\infty} (\lambda P + \mu Q)(t) R(t) e^{-t}\,dt$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t}\,dt + \mu \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)e^{-t}\,dt$$

(2 intégrales cv)

$$= \lambda \langle P, R\rangle + \mu \langle Q, R\rangle$$

et $\langle P, \lambda Q + \mu R\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)(\lambda Q + \mu R)(t)e^{-t}\,dt$

$= \lambda\langle P, Q\rangle + \mu \langle P, R\rangle$ de même

donc $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est bilinéaire

$\boxed{\Pi 2}$ Soit $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda P + \mu Q, R \rangle = \int_0^{+\infty} (\lambda P + \mu Q)(t) R(t) e^{-t} dt$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} P(t) R(t) e^{-t} dt + \mu \int_0^{+\infty} Q(t) R(t) e^{-t} dt$$

(2 intégrales cv)

$$= \lambda \langle P, R \rangle + \mu \langle Q, R \rangle$$

et $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt$

$$= \int_0^{+\infty} Q(t) P(t) e^{-t} dt$$

$$= \langle Q, P \rangle$$

Donc $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à sa première variable et symétrique, donc bilinéaire.

$\Pi 3$: $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est bilinéaire par linéarité de l'intégrale et bilinéarité du produit.

• $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$: $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$

• positivité : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$

$$\langle P, P \rangle = \int_0^{+\infty} P^2(t) e^{-t} dt$$

≥ 0 car $\forall t$ $P^2(t) e^{-t} \geq 0$

- <u>défini positif</u> : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ À toujours rédiger.

On suppose $\langle P, P \rangle = 0$

ie $\int_0^{+\infty} P^2(t) e^{-t} \, dt = 0$

intégrale nulle d'une fct positive continue

donc $\forall t \in [0, +\infty[\quad P^2(t) e^{-t} = 0$

ie $P(t) = 0$

donc P a une infinité de racines,

donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique, positive et définie positive, ie un produit scalaire.

Exemple. Soit w une fonction continue, à valeurs strictement positives sur un intervalle I. On note :

$$E = \{f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \text{ t.q. } f^2 w \text{ intégrable sur } I\}$$

C'est un espace vectoriel, que l'on peut munir d'un produit scalaire en posant :

$$\langle f, g\rangle = \int_I f(t)g(t)w(t)\,\mathrm{d}t$$

Ah bon ?

Mq que E ss-ev de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

- $E \subset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$
- $t \longmapsto 0$ est dans E
- E stable par loi externe

  Si $f \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in E$
- E stable par addition :

  Soit $f, g \in E$

  $(f+g)^2 w$ est intégrable sur I ?

  $= f^2 w + g^2 w + \underbrace{2fgw}_{\in \mathcal{L}^1 ?}$

$0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ donc $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$

$\forall t \quad |f(t)g(t)w(t)|$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{2}\left(f^2(t) + g^2(t)\right)w(t)}_{\text{est intégrable sur } I}$$ par hyp.

donc $(f+g)^2 w$ est intégrable sur I

1.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$$

L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires.

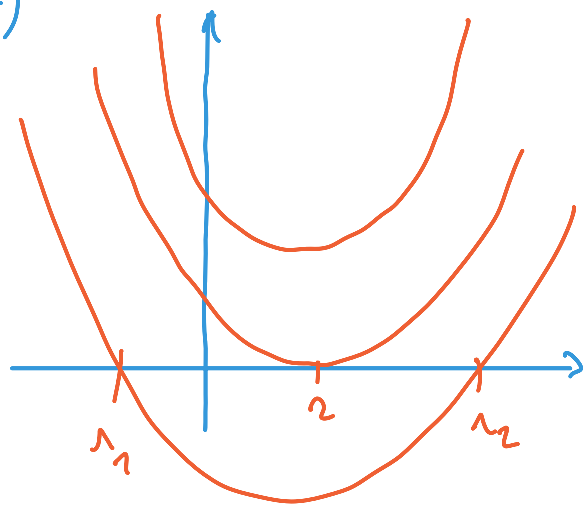
Preuve:

$\forall t \in \mathbb{R} \quad 0 \leq \langle tx+y, tx+y\rangle$

$= t^2\langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$

$= P(t)$

où $P \in \mathbb{R}_2[X]$



1er cas : Si $\langle x, x\rangle > 0$

alors pol de degré 2 de signe ≥ 0

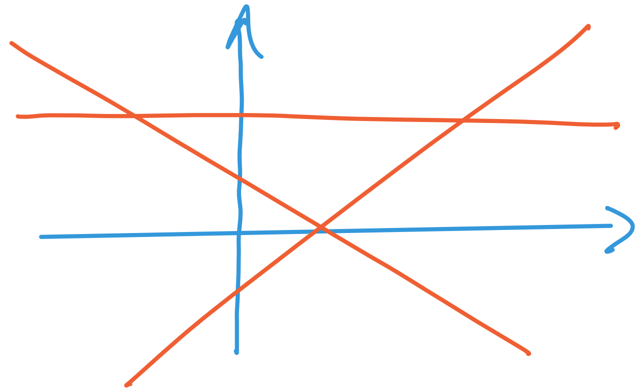
donc $\Delta \leq 0$

ie $\langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0$

ie $\langle x, y\rangle \leq \sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$

2e cas Si $\langle x, x\rangle = 0$

$\forall t \quad 2t\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \geq 0$



Nécessairement, $\langle x, y \rangle = 0$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz est triviale

Cas d'égalité:

correspond à $\Delta = 0$

donc $\exists t$ tq $P(t) = 0$

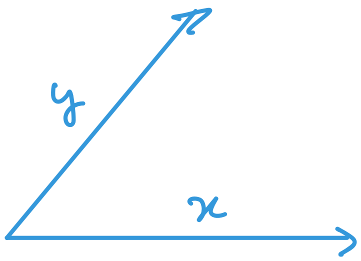
ie $\langle tx+y , tx+y \rangle = 0$

Or le produit scalaire est défini positif

donc $tx+y = 0$

donc (x,y) liée.

Remarque: Ben oui !!



$$|\langle x,y \rangle| = \|x\| \, \|y\| \, |\cos(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\|$$

Remarque. *On notera $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ la norme associée au produit scalaire. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'interprète bien géométriquement.*

Inégalité de Minkowski. Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens (on dit parfois *positivement liés*).

Remarque. *Avec $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, l'inégalité de Minkowski n'est rien d'autre que l'inégalité triangulaire sur la norme euclidienne.*

Preuve:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$$
$$= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$$
$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\|$$

par Cauchy-Schwarz

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

donc $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

1.5 Norme euclidienne

Définition. On appelle **norme euclidienne** associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'application :

$$\|\cdot\| \,:\, x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Proposition. C'est une norme.

- $\|x\|$ existe car $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est positif donc $\langle x, x\rangle \geqslant 0$
- $\|x\| \geqslant 0$
- séparation: On suppose $\|x\| = 0$

  ie $\langle x, x\rangle = 0$

donc $x=0$

car $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est défini positif.

- inég triangulaire = Minkowski
- homogénéité :

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} \qquad \text{bilinéarité}$$

$$= |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$$= |\lambda| \, \|x\|$$

Définition. Un vecteur de norme 1 est qualifié d'**unitaire**.

Proposition. Si E est muni de sa norme euclidienne, le produit scalaire est continu sur $E \times E$.

Cette proposition sera justifiée au chapitre 45

1.6 Identités remarquables

Proposition. On a les identités remarquables suivantes :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \qquad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$$

les identités de polarisation :

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \qquad \langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

et l'identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2
\end{aligned}$$