Pour moi : 42.19, 42.23, 43.3

U ouvert $\iff \forall x \in U, \exists r > 0 \quad B(x,r) \subset U$

$$B(x,r) = \{y \in E \text{ tq } \|y-x\| < r\}$$

F fermé $\iff E \setminus F$ ouvert

$\iff \forall (u_n)_n \in F^{\mathbb{N}}, \left\{ \begin{array}{l} \text{si } (u_n)_n \text{ cv vers } \ell \\ \text{alors } \ell \in F \end{array} \right.$

3 Topologie et normes équivalentes

Théorème.

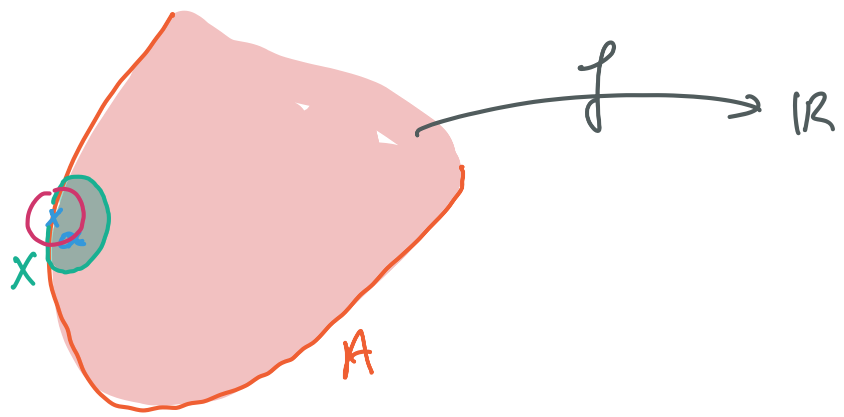
Les notions topologiques étudiées ci-avant sont invariante par passage à une norme équivalente :

- Si A est un ouvert de (E, N_1) et N_2 équivalente à N_1, alors A est un ouvert de (E, N_2).
- L'intérieur de A dans (E, N_1), lorsque N_2 équivalente à N_1, est le même que l'intérieur de A dans (E, N_2).
- etc.

Preuve : Si N_1 et N_2 sont équivalentes,

alors les boules sont "emboîtées".

$(E, \|\cdot\|)$



4 Topologie induite

4.1 Voisinage relatif, ouvert relatif

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A une partie quelconque de E. Soit $a \in A$ et $X \subset A$. On dit que X est un **voisinage relatif de** a **dans** A s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \cap A \subset X$

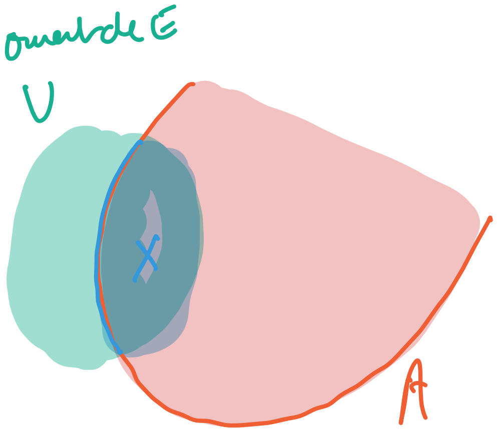
Remarque. *Ainsi, les voisinages relatifs de a dans A sont les intersections avec A des voisinages de a (dans E).*

Définition. On conserve les notations précédentes. On dit que X est un **ouvert relatif de** A si et seulement s'il est voisinage relatif de chacun de ses points, c'est-à-dire :

$$\forall a \in X,\ \exists r > 0 \text{ t.q. } B(a, r) \cap A \subset X$$

Proposition. X est un ouvert relatif de A si et seulement s'il existe U ouvert (de E) tel que $X = U \cap A$.

Remarque. *On dit parfois que $U \cap A$ est la* **trace** *laissée par U sur A.*



X ouvert relatif de A

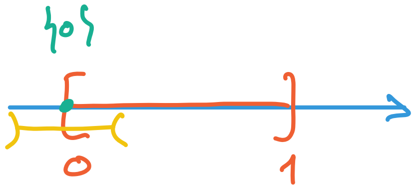
$X = U \cap A$

Exemple. Les parties suivantes sont-elles des ouverts relatifs de $[0,1]$?

1. $[0,1]$
2. $\{0\}$
3. $[0,1/2]$
4. $[0,3/4[$
5. $[0,1] \setminus [1/2,3/4]$
6. $]0,1[$
7. $]0,1/2[$

$[0,1] = \underbrace{]-1,2[}_{\text{ouvert de } \mathbb{R}} \cap [0,1]$ est ouvert relatif de $[0,1]$

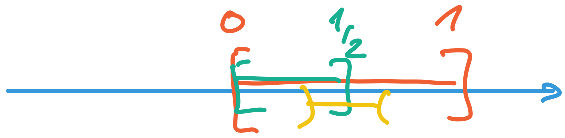
$\{0\}$ n'est pas un ouvert relatif de $[0,1]$



$\forall r>0$ $\quad \underbrace{B(0,r) \cap [0,1]}_{= [0,r[} \not\subset \{0\}$

pour $r<1$

$[0,\frac{1}{2}]$ n'est pas un ouvert relatif de $[0,1]$



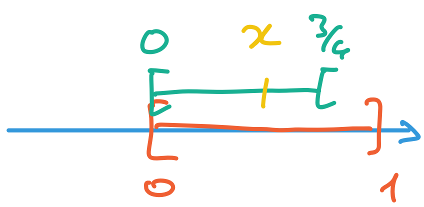
Mque $\neg\left(\forall x \in [0,\frac{1}{2}], \exists r>0 \text{ tq } B(x,r) \cap [0,1] \subset [0,\frac{1}{2}]\right)$

ie $\exists x \in [0,\frac{1}{2}], \forall r>0 \quad B(x,r) \cap [0,1] \not\subset [0,\frac{1}{2}]$

en effet avec $x = \frac{1}{2}$

$\forall r>0$ (et $r<\frac{1}{2}$) $\quad \underbrace{B(\frac{1}{2},r)}_{=]\frac{1}{2}-r, \frac{1}{2}+r[} \cap [0,1] =]\frac{1}{2}-r, \frac{1}{2}-r[\quad \not\subset [0,\frac{1}{2}]$

$[0,3/4[$ est ouvert relatif de $[0,1]$



car $[0,3/4[$

Mq que : $\forall x \in [0, \frac{3}{4}[, \ \exists r > 0$ tq $B(x,r) \cap [0,1] \subset [0, \frac{3}{4}[$

Soit $x \in [0, \frac{3}{4}[$

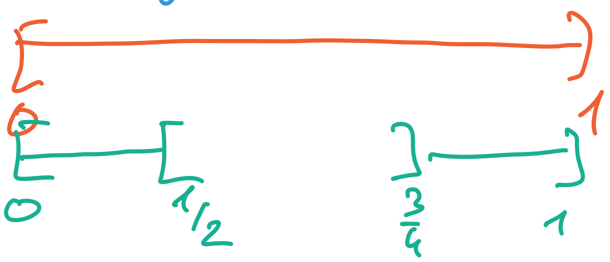
Posons $r = \frac{3}{4} - x$

$$B(x,r) =]x - r, x + r[$$
$$=]2x - \frac{3}{4}, \frac{3}{4}[$$
$$B(x,r) \cap [0,1] \subset [0, \frac{3}{4}[$$

Mieux : $[0, \frac{3}{4}[= \underbrace{]-1, \frac{3}{4}[}_{\text{ouvert de } \mathbb{R}} \cap [0,1]$

$[0,1] \setminus [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ ouvert relatif de $[0,1]$

$$= [0,1] \cap \underbrace{\left( ]-1, \frac{1}{2}[\cup]\frac{3}{4}, 2[\right)}_{\text{ouvert}}$$



$\underset{\uparrow \text{ouvert}}{]0,1[} =]0,1[\cap [0,1]$ donc ouvert relatif de $[0,1]$

$]0, \frac{1}{2}[=]0, \frac{1}{2}[\cap [0,1]$ donc - - - - -

Rmq : un ouvert de E inclus dans A est ouvert relatif de A.

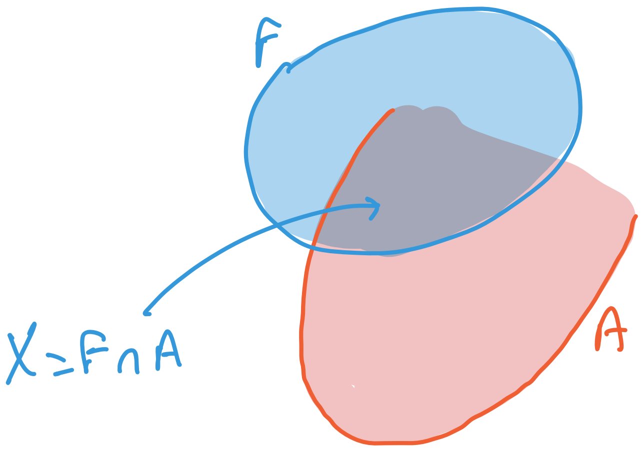
4.2 Fermé relatif

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A une partie quelconque de E. On dit que $X \subset A$ est un **fermé relatif de** A lorsque $A \setminus X$ est un ouvert relatif de A.

Proposition. X est un fermé relatif de A si et seulement s'il existe F fermé (de E) tel que $X = F \cap A$.

Remarque. *On dit parfois que $F \cap A$ est la* **trace** *laissée par F sur A.*

Caractérisation séquentielle. X est un fermé relatif de A si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers un élément ℓ de A, alors $\ell \in X$.



Exemple. Est-ce que $]-\infty, 0[$ est un ouvert relatif de $\mathbb{R}^*$? un fermé relatif de $\mathbb{R}^*$?

Exemple. Dans $E = \mathbb{R}^2$, on note $O = (0,0)$ et $a = (1,1)$ et on considère $A = B(O, 1/4) \cup B(a, 1/4)$. Proposer quatre parties de A qui sont à la fois des ouverts relatifs et des fermés relatifs de A.

ouvert

$]-\infty, 0[=]-\infty, 0[\cap \mathbb{R}^*$

donc est ouvert relatif de $\mathbb{R}^*$

$]-\infty, 0[$ ~~pas~~ fermé relatif de $\mathbb{R}^*$

car $\mathbb{R}^* \setminus]-\infty, 0[=]0, +\infty[$ ouvert relatif de $\mathbb{R}^*$

Plus directement. $]-\infty, 0[=]-\infty, 0] \cap \mathbb{R}^*$

fermé de $\mathbb{R}$

Oui oui !! $]-\infty, 0]^c =]0, +\infty[$

Oui oui !! caract séquentielle :

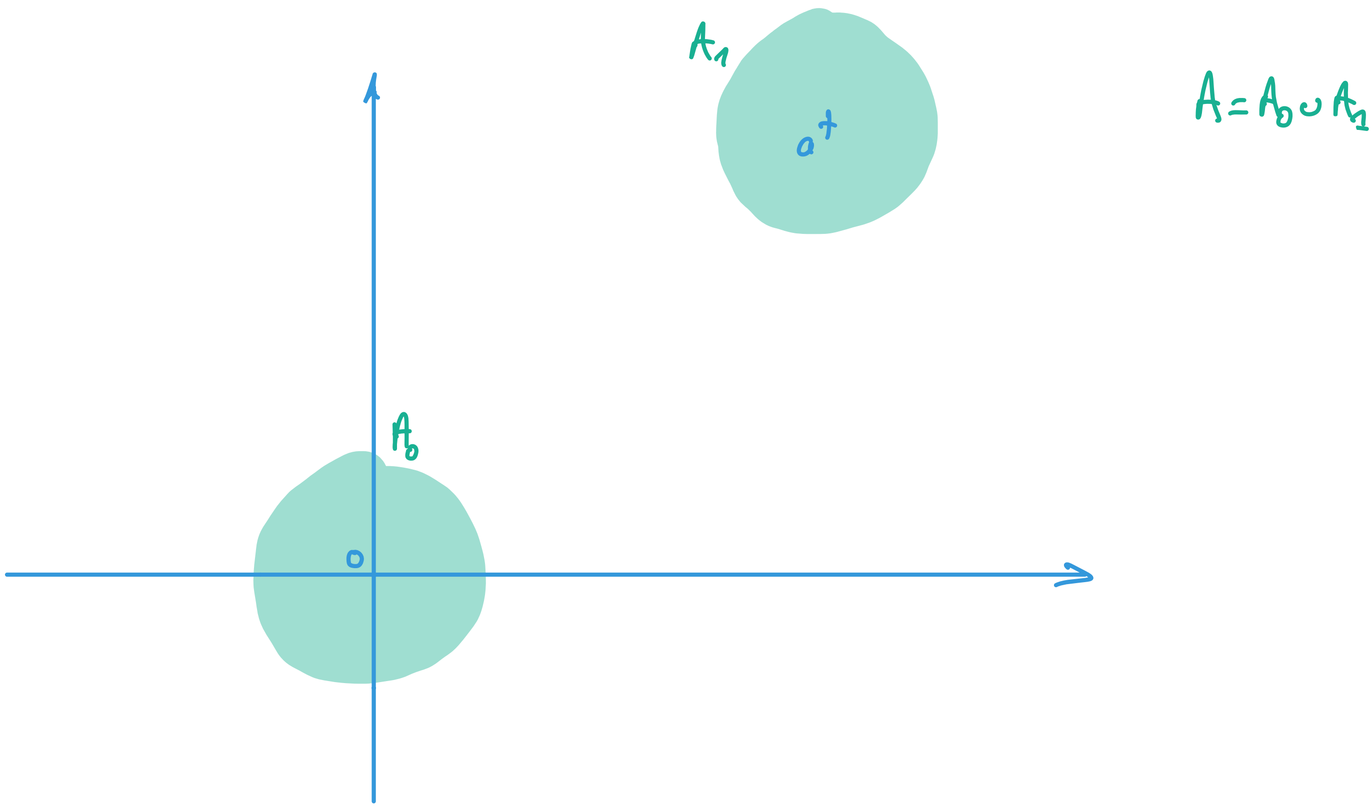
Soit $(u_n)_n$ suite tq $\forall n$ $u_n \leq 0$

tq $u_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell$.

Par passage à la limite dans les inégalités larges $\ell \leq 0$ ie $\ell \in]-\infty, 0]$

Exemple. Est-ce que $]-\infty, 0[$ est un ouvert relatif de $\mathbb{R}^*$? un fermé relatif de $\mathbb{R}^*$?

Exemple. Dans $E = \mathbb{R}^2$, on note $O = (0, 0)$ et $a = (1, 1)$ et on considère $A = B(O, 1/4) \cup B(a, 1/4)$. Proposer quatre parties de A qui sont à la fois des ouverts relatifs et des fermés relatifs de A.



$A_0 = B_f(0, \frac{1}{2}) \cap A$ est donc un fermé relatif de A

A_0 est ouvert donc ouvert relatif de A

A_1 aussi

$\emptyset$ aussi

A aussi

4.3 Densité

Définition. On dit que $X \subset A$ est **dense** dans A lorsque tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de X.

42.26