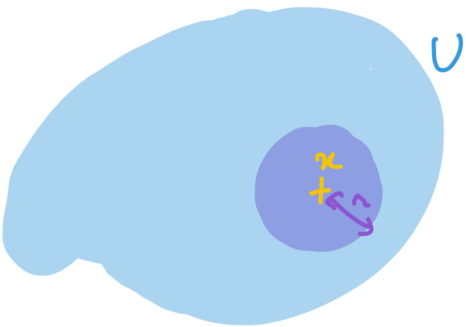
Pour me : 42.11, 43.11, 43.3

$(E, \|.\|)$ norme.

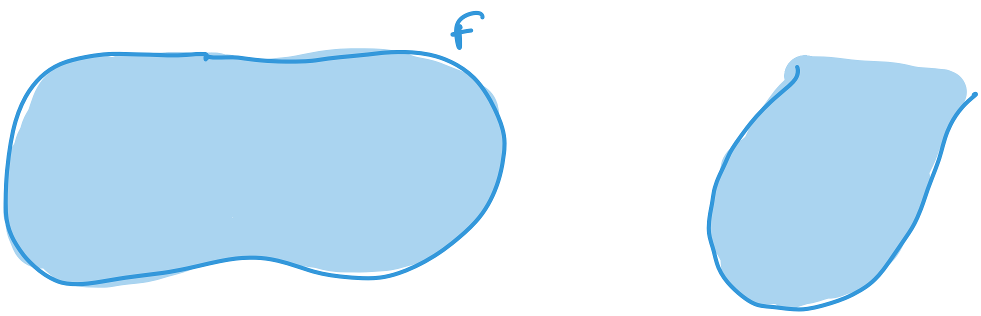
U ouvert $\iff \forall x \in U, \exists r>0$ tq $B(x,r) \subset U$

$\{y \in E$ tq $\|y-x\| < r\}$



F fermé $\iff E \setminus F$ ouvert

$\iff \forall (u_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ si $u_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell$, alors $\ell \in F$



3 Topologie et normes équivalentes

Théorème.

Les notions topologiques étudiées ci-avant sont invariante par passage à une norme équivalente :

- Si A est un ouvert de (E, N_1) et N_2 équivalente à N_1, alors A est un ouvert de (E, N_2).
- L'intérieur de A dans (E, N_1), lorsque N_2 équivalente à N_1, est le même que l'intérieur de A dans (E, N_2).
- etc.

4 Topologie induite

4.1 Voisinage relatif, ouvert relatif

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A une partie quelconque de E. Soit $a \in A$ et $X \subset A$. On dit que X est un **voisinage relatif de** a **dans** A s'il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \cap A \subset X$

Remarque. *Ainsi, les voisinages relatifs de a dans A sont les intersections avec A des voisinages de a (dans E).*

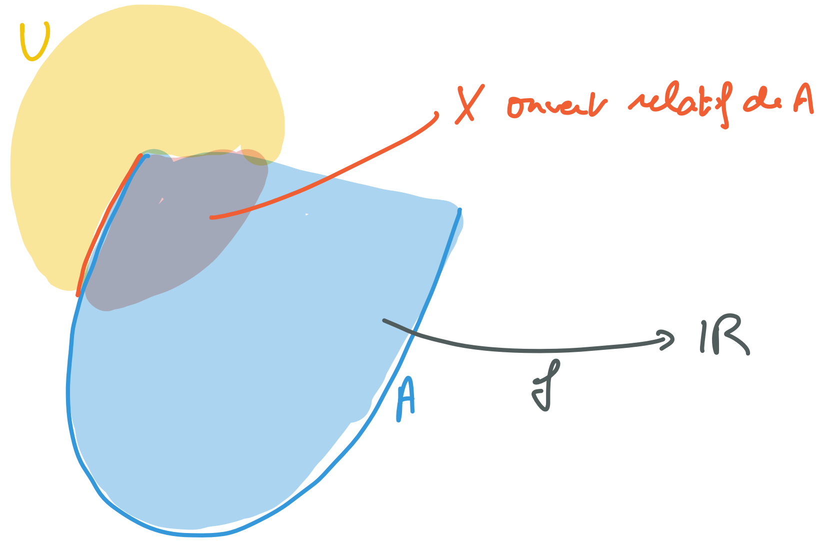
Définition. On conserve les notations précédentes. On dit que X est un **ouvert relatif de** A si et seulement s'il est voisinage relatif de chacun de ses points, c'est-à-dire :

$$\forall a \in X,\ \exists r > 0 \text{ t.q. } B(a,r) \cap A \subset X$$

$X \subset A$

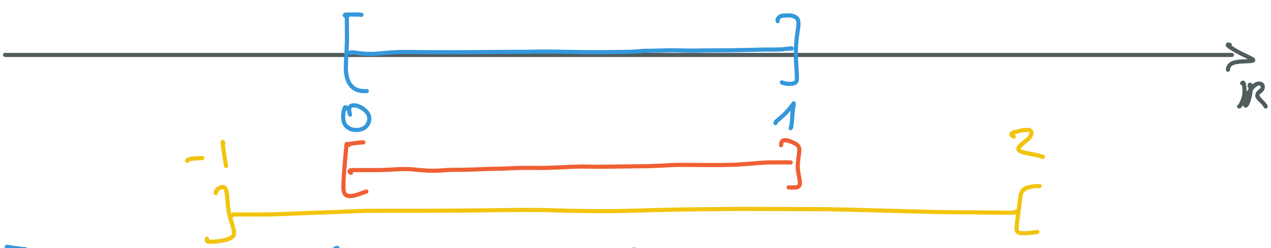
Proposition. X est un ouvert relatif de A si et seulement s'il existe U ouvert (de E) tel que $X = U \cap A$.

Remarque. *On dit parfois que $U \cap A$ est la* **trace** *laissée par U sur A.*



Exemple. Les parties suivantes sont-elles des ouverts relatifs de $[0,1]$? (dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$)

1. $[0,1]$
2. $\{0\}$
3. $[0,1/2]$
4. $[0,3/4[$
5. $[0,1] \setminus [1/2,3/4]$
6. $]0,1[$
7. $]0,1/2[$

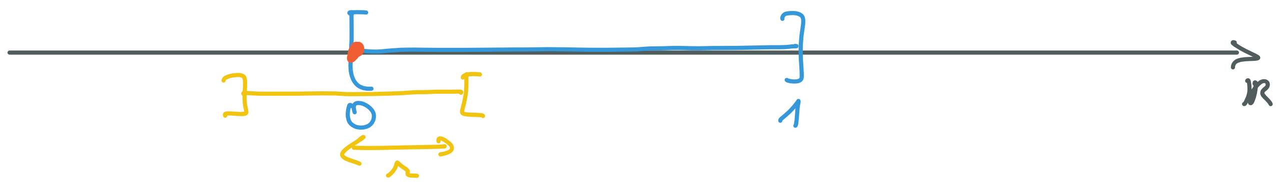


$[0,1]$ ouvert relatif de $[0,1]$? oui

$=]-1,2[\cap [0,1]$

$\{0\}$ ouvert relatif de $[0,1]$? non

~~$= \cap [0,1]$~~



Mque : $\neg\left(\forall x \in \{0\},\ \exists r>0 \text{ tq } B(x,r)\cap[0,1] \subset \{0\}\right)$

ie $\left(\exists x\in\{0\}\ \ \forall r>0 \ \ B(x,r)\cap[0,1] \not\subset \{0\}\right)$

$\forall r>0$ $(r<1)$ $\quad B(0,r)\cap[0,1]$

$= \,]-r,r[\, \cap [0,1]$

$= [0, r[$

$\not\subset \{0\}$

④ $[0,\frac{3}{4}[\;=\;]-1,\frac{3}{4}[\,\cap [0,1]$

est ouvert relatif de $[0,1]$

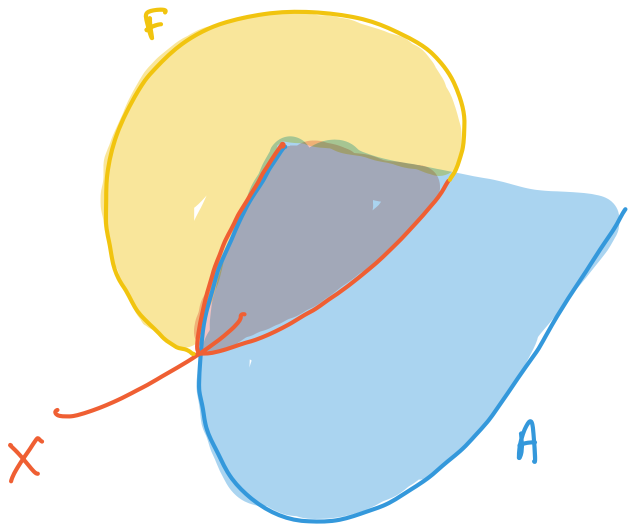
4.2 Fermé relatif

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A une partie quelconque de E. On dit que $X \subset A$ est un **fermé relatif de** A lorsque $A \setminus X$ est un ouvert relatif de A.

Proposition. X est un fermé relatif de A si et seulement s'il existe F fermé (de E) tel que $X = F \cap A$.

Remarque. *On dit parfois que $F \cap A$ est la* **trace** *laissée par F sur A.*

Caractérisation séquentielle. X est un fermé relatif de A si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers un élément ℓ de A, alors $\ell \in X$.



Exemple. Est-ce que $]-\infty, 0[$ est un ouvert relatif de $\mathbb{R}^*$? un fermé relatif de $\mathbb{R}^*$?

Exemple. Dans $E = \mathbb{R}^2$, on note $O = (0,0)$ et $a = (1,1)$ et on considère $A = B(O, 1/4) \cup B(a, 1/4)$. Proposer quatre parties de A qui sont à la fois des ouverts relatifs et des fermés relatifs de A.

$]-\infty, 0[= \underbrace{]-\infty, 0[}_{\text{ouvert}} \cap \mathbb{R}^*$ ouvert relatif de $\mathbb{R}^*$

Rmq: Si $X \subset A$ et X ouvert, alors X ouvert relatif de A.

$]-\infty, 0[= \underbrace{]-\infty, 0]}_{\text{fermé}} \cap \mathbb{R}^*$

$]-\infty, 0]^c =]0, +\infty[$ ouvert.

Rque: $]-\infty, 0]$ fermé par caract séquentielle.

Soit $(u_n)_n$ suite tq $\forall n$ $u_n \in]-\infty, 0]$ ie $u_n \leq 0$

et tq $u_n \xrightarrow[+\infty]{} l$

Par passage à la limite dans les inégalités larges:

$$l \leq 0$$

donc $l \in]-\infty, 0]$

4.3 Densité

Définition. On dit que $X \subset A$ est **dense** dans A lorsque tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de X.