13 Topologie dans un evn

$(E, \|.\|)$ evn

1.1) Voisinages

- Définition : Soit $a \in E$, $V \subset E$

  V est voisinage de $a \Leftrightarrow \exists \delta > 0,\ B(a, \delta) \subset V$

- Remarque : Boules ouvertes uniquement

  On note $\mathcal{V}(a)$ pour l'ensemble des voisinages de a.

- Propriété : • Si V voisinage de a et $W \supset V$ alors W voisinage de a

  • Une union de voisinages de a est un voisinage de a

  • Une intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a

- Preuve : Soit $V_1, \dots, V_n$ des voisinages de a donc $\exists \delta_1, \dots, \delta_n > 0$ tq $\forall i,\ B(a, \delta_i) \subset V_i$

  On pose alors $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_n)$. $\forall i \in [\![1;n]\!],\ B(a, \delta) \subset B(a, \delta_i) \subset V_i$

  donc $B(a, \delta) \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i$

- Propriété : Deux normes équivalentes définissent le même voisinage.

- Preuve : On suppose $\exists \alpha, \beta > 0$ tq $\alpha N \leq \|.\| \leq \beta N$

  Soit V voisinage de $a \in E$ pour $\|.\|$, ie $\exists \delta > 0$ tq $B_{\|.\|}(a, \delta) \subset V$

  (donc $B_N(a, \frac{r}{\beta}) \subset B_{\|.\|}(a, r)$)

  donc $B_N(a, \frac{\delta}{\beta}) \subset V$ donc V voisinage de a pour N

1.2) Ouverts

- Définition : Soit $U \subset E$, U est ouvert $\Leftrightarrow$ U est voisinage de chacun de ses points

  ie $\forall a \in U, \exists \delta > 0$ tq $B(a, \delta) \subset U$

- Exemples : • E ouvert • $\emptyset$ ouvert

- Propriété : Une boule ouverte est un ouvert de E

  Soit $x \in B(a, R)$ ie $\|x - a\| < R$. Posons $\delta = R - \|x - a\| > 0$ car $\|x-a\| < R$

  Soit $y \in B(x, \delta)$ ie $\|y - x\| < \delta$. $\|y - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\|$

  $< \delta + \|x - a\| = R$ donc $B(x, \delta) \subset B(a, R)$

- Propriété : • Une union quelconque d'ouverts est un ouvert

  • Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

- **Propriété** : Si $(E_i, \|.\|_i)_i$ sont des evn (nombre fini)

$\left(\prod_{i=1}^{n} E_i, \|.\|\right)$ est l'evn produit avec $\|.\| = \text{Max} \|.\|_i$

Un "produit" d'ouverts est ouvert.

- **Preuve** : Cas $n=2$: Soit U_1, U_2 des ouverts dans E_1 et E_2 respectivement.

Montrons que $U_1 \times U_2$ ouvert dans $E_1 \times E_2$:

Soit $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2$, U_1 ouvert donc $\exists \delta_1 > 0$ tq $B_1(x_1, \delta_1) \subset U_1$
U_2 ouvert donc $\exists \delta_2 > 0$ tq $B_2(x_2, \delta_2) \subset U_2$

On pose $\delta = \text{Min}(\delta_1, \delta_2) > 0$ alors $B_1(x_1, \delta) \subset U_1$ et $B_2(x_2, \delta) \subset U_2$

donc $B_1(x_1, \delta) \times B_2(x_2, \delta) \subset U$

1.3) Intérieurs

- **Définition** : Soit $A \subset E$, $a \in A$ est intérieur de $A \Leftrightarrow \exists \delta > 0$ tq $B(a, \delta) \subset A$

ie A est voisinage de a. On appelle intérieur de A l'ensemble $\mathring{A}$ de tous les points intérieurs à A

- **Propriété** : Soit $A \subset E$, A ouvert $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$
- **Remarque** : $\mathring{A}$ est toujours inclus dans A

$$\boxed{U \text{ ouvert} \Leftrightarrow \forall a \in U, \exists \delta > 0 \text{ tq } B(a, \delta) \subset U}$$

2.1) Fermés

- **Définition** : Soit $F \subset E$, F est un fermé $\Leftrightarrow F^c = E \setminus F$ ouvert
- **Exemples** :
  - E est fermé car $E^c = \emptyset$ ouvert
  - $\emptyset$ est fermé car $\emptyset^c = E$ ouvert
  - Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, les boules ouvertes sont les $]a, b[= B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$

    $A = [0; +\infty[$ est fermé car $A^c =]-\infty; 0[$. Soit $x \in A^c$, $B(x, |x|) \subset A^c$ ouvert
- **Propriété** :
  - Une intersection quelconque de fermés est un fermé
  - Une union finie de fermés est un fermé
- **Preuve** : $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$

2.2) Caractérisation séquentielle

- **Théorème** : Soit $A \subset E$. A est fermé $\Leftrightarrow$ pour toute suite $(u_n)_n$ convergente d'éléments de A, la limite est dans A ie $\forall (u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \Rightarrow l \in A$
- **Preuve** : $\boxed{\Leftarrow}$ Par contraposée, on suppose que A n'est pas fermé ie A^c n'est pas ouvert

  ie $\exists x \in A^c, \forall \delta > 0, B(x, \delta) \not\subset A^c$

Pour $\delta = \frac{1}{n}$, $\exists u_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$

On a donc construit $(u_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de A tels que $\forall n$, $\|u_n - x\| < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $(u_n)_n$ converge. Sa limite $x \notin A$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose A Fermé (ie A^c ouvert)

Soit $(u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$. Montrons que $(u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \Rightarrow l \in A)$ par contraposée.

On considère $l \notin A$ ie $l \in A^c$ ouvert donc $\exists \varepsilon > 0$ tq $B(l, \varepsilon) \subset A^c$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$ donc $u_n \notin B(l, \varepsilon)$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} l$

- Propriété : Une boule fermée est un Fermé
- Preuve : $\boxed{M1}$ Montrons que $BF(a,r)^c$ ouvert

$\boxed{M2}$ Par caractérisation séquentielle :

Soit $(u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

$\forall n$, $\|u_n - a\| \leq r$ donc par passage à la limite dans les inégalités larges, $\|l - a\| \leq r$

ie $l \in BF(a,r)$

⚠ Mq $\|u_n - a\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|l - a\|$: $\big| \|u_n - a\| - \|l - a\| \big| \leq \|u_n - l\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2.3) Adhérence

- Définition : Soit $A \subset E$, soit $x \in E$

On dit que x est adhérent à A $\Leftrightarrow \forall \delta > 0$, $B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset$

- Remarque : Si $x \in A$, x est adhérent à A
- Propriété : Caractérisation séquentielle : x adhérent à A $\Leftrightarrow$ x est limite d'une suite d'éléments de A
- Définition : On note $\overline{A}$, appelé adhérence de A, l'ensemble des éléments adhérents à A
- Propriété : A Fermé $\Leftrightarrow A = \overline{A}$
- Définition : On appelle Frontière de A l'ensemble $Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$
- Théorème : $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$
- Preuve : Rappelons $d(x, A) = \underset{a \in A}{\mathrm{Inf}} \|x - a\|$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $x \in \overline{A}$, $\forall \delta > 0$, $B(x, \delta) \cap A \neq 0$ donc en particulier avec $\delta = \frac{1}{n}$,

$\exists a_n \in A$ tq $\|x - a_n\| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $d(x, A) = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $d(x, A) = 0$ donc par définition de Inf avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $\exists a_n \in A$ tq $\|x - a_n\| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $a_n \to x$ donc $x \in \overline{A}$

Définition : Soit $A \subset B$, on dit que A est dense dans $B \iff \overline{A} = B$

Exemple : $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}[X]$ dense dans $(\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$