N norme :

- est-ce que $N(x)$ existe ?
- $N(x) \geq 0$
- $N(\underset{\in E}{x}) = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow x = 0_E$
- $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$
- $N(\lambda x) = |\lambda| \, N(x)$

$x \in B(a, r) \iff \|x - a\| < r$

$BF(a, r)$

$S(a, r)$

A convexe <u>ssi</u> $\forall x, y \in A \quad [x, y] \subset A$

<u>ie</u> $\forall x, y \in A \quad \forall z \in [x, y] \quad z \in A$

ie $\forall x, y \in A \quad \forall t \in [0, 1] \quad \underset{t \in \mathbb{R}}{t} \underset{x \in E}{x} + (1-t) y \in A$

$\mathbb{R}^p \quad \mathbb{K}[X] \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$

Pour vendredi: 42.3, 42.10, 42.16

1.5 Parties bornées

Définition. Une partie A de E est dite **bornée** lorsqu'il existe $M \geqslant 0$ tel que :

M ne dépend pas de x

$$\forall x \in A, \ \|x\| \leqslant M$$

Proposition.

- Toute intersection de parties bornées est bornée.
- Toute union finie de parties bornées est bornée.

Remarque. *Pour l'intersection, il suffit en fait qu'une seule des parties soit bornée. Pour la réunion, c'est faux dans le cas d'une union infinie.*

Exemple. Donner un exemple non borné d'union infinie de parties bornées.

Remarque. *Montrer qu'une partie A est bornée, c'est majorer la norme de ses éléments x par une quantité indépendante de x.*

Preuve:

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties bornées de E.

On suppose $I \neq \emptyset$

$\forall i \in I, \quad \exists M_i$ tq $\forall x \in A_i \quad \|x\| \leq M_i$

Soit $i_0 \in I$

$\forall x \in \bigcap_{i\in I} A_i$, on a en particulier $x \in A_{i_0}$

donc $\|x\| \leq M_{i_0}$

Donc $\bigcap_{i \in I} A_i$ est bornée.

Rmq: Si $I = \emptyset$, $\bigcap_{i\in I} A_i$ pas bien défini

$\emptyset$, E

neutre de $\cap$

Réunion : Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ famille finie de parties bornées

$\forall i\ \exists M_i$ tq $\forall x\in A_i,\ \|x\|\leq M_i$

Soit $x\in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

donc $\exists i\in\{1,\dots,n\}$ tq $x\in A_i$

donc $\exists i$ tq $\|x\|\leq M_i$

$\leq \max_{i=1}^{n}(M_i)$

indep de i, de x

Donc $\forall x\in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $\|x\|\leq M = \max_{i=1}^{n}(M_i)$

Cas d'une réunion infinie

Contre-exemple:

dans $(\mathbb{R},|\cdot|)$

dans $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_2)$

Posons $A_n = B((0,0),n)$

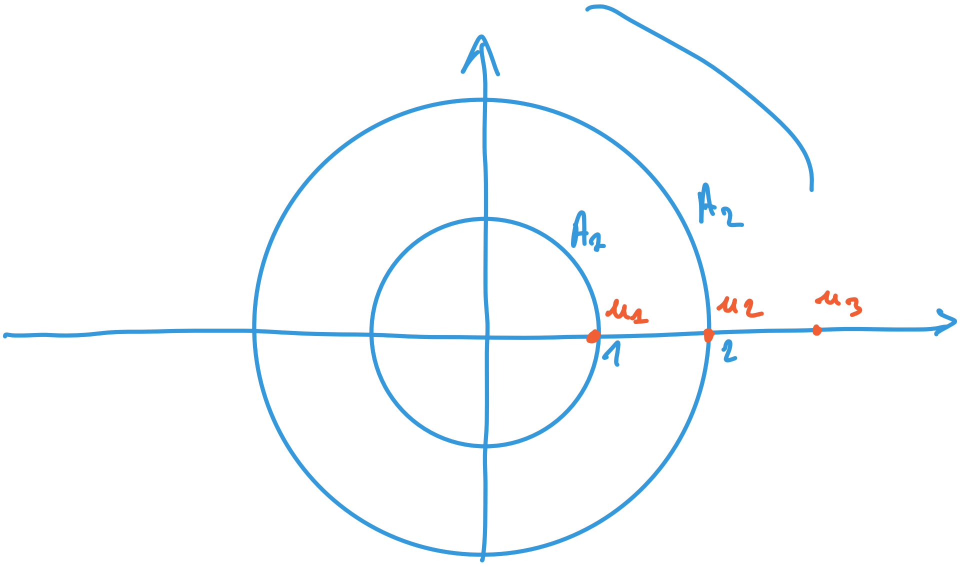
$\forall (x,y)\in A_n,\ \|(x,y)\|_2 < n \leq n$

donc A_n bornée.

On note $F=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

On note $u_k=(k,0)$

Mque $u_k\in F\ \forall k$, et $\|u_k\|_2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$



- $\|u_k\| = \sqrt{k^2 + 0} = k < k+1$

  donc $u_k \in B((0,0), k+1) = A_{k+1} \subset F$

- $\|u_k\| = k \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$

Exemple. On considère l'espace $E = \mathbb{K}[X]$, muni des deux normes définies par, si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$:

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{d} |a_k| \qquad N_\infty(P) = \underset{0 \leqslant k \leqslant d}{\mathrm{Max}} |a_k|$$

Que dire de l'ensemble A des polynômes dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1 ?

Avec $P = 1 + X + X^2$ $\quad N_1(P) = 3 \quad N_\infty(P) = 1$

- Soit $P \in A$, $\exists d$, $a_k \in \{0, 1\}$ tq $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$

  et donc $N_\infty(P) = \mathrm{Max}(|a_k|)$

  ≤ 1 indép de P

  donc A est bornée pour N_∞

- Posons $P_n = 1 + X + \dots + X^n = \sum_{k=0}^{n} 1 . X^k$

  $N_1(P_n) = n+1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

  et $P_n \in A$

  donc A n'est pas bornée pour N_1

Méthode. *Pour montrer que A n'est pas bornée, on exhibe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A telle que $\|x_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.*

Remarque. *Dire qu'une fonction (resp. une suite) à valeurs dans E est bornée, c'est dire que l'ensemble de ses valeurs est borné.*

1.6 Espace vectoriel normé produit

Définition. On considère p espaces vectoriels normés (E_i, N_i) sur le corps $\mathbb{K}$. Pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$, on définit :

$$N(x) = \underset{1 \leqslant i \leqslant p}{\text{Max}} N_i(x)$$

Alors N est une norme sur $E_1 \times \cdots \times E_p$, et $(E_1 \times \cdots \times E_p, N)$ s'appelle **l'espace vectoriel normé produit des** $\big((E_i, N_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant p}$.

E_1, E_2 deux ev. $(E_1, +, \cdot)$ ev sur $\mathbb{K}$

$(E_2, +, \cdot)$ ev sur $\mathbb{K}$

$E_1 \times E_2$ produit cartésien est muni d'une structure d'ev produit en posant

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda . x_1, \lambda . x_2)$$

N_1, N_2 sont des normes sur E_1, E_2 resp.

On munit $E_1 \times E_2$ d'une norme (norme produit)

en posant $N(x_1, x_2) = \text{Max}(N_1(x_1), N_2(x_2))$

Prop : N est une norme sur $E_1 \times E_2$.

2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

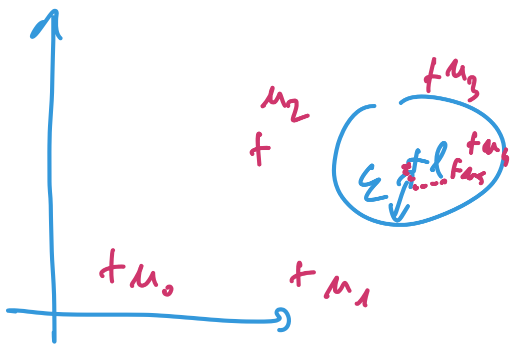
2.1 Convergence, divergence

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E^{\mathbb{N}}$ est dite **convergente** si et seulement s'il existe $\ell \in E$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geqslant n_0,\ \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

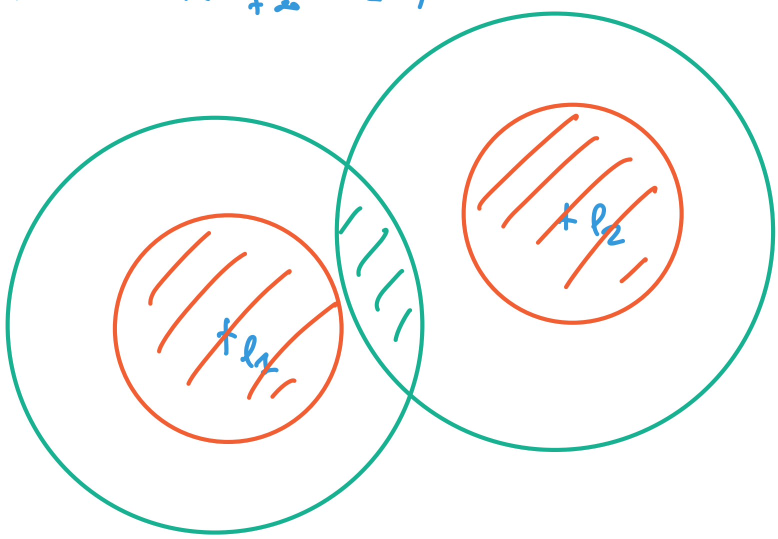
$u_n \in BF(\ell, \varepsilon)$

On dit qu'elle est **divergente** sinon.



Proposition. En cas de convergence, ℓ est unique et s'appelle **la limite** de $(u_n)_n$. On note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

On suppose que $u_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell_1$ et $u_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell_2$, avec $\ell_1 \neq \ell_2$



Notons, $\varepsilon = \dfrac{\|\ell_1 - \ell_2\|}{\cancel{2}\ 3} > 0$ par séparation

On applique la déf de convergence avec ce ε.

d'où n_1, n_2 tq $\forall n \geqslant n_1 \quad u_n \in BF(\ell_1, \varepsilon)$

$\forall n \geqslant n_2 \quad u_n \in BF(\ell_2, \varepsilon)$

Soit $n \geqslant \max(n_1, n_2)$ et donc $\|u_n - \ell_1\| \leqslant \varepsilon$

$\|u_n - \ell_2\| \leqslant \varepsilon$

donc $\|\ell_1 - \ell_2\| = \|\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2\|$

$$\leq \|\ell_1 - u_n\| + \|u_n - \ell_2\|$$

$$\leq 2\varepsilon$$

$$= \frac{2}{3}\|\ell_1 - \ell_2\|$$

Contradit $\|\ell_1 - \ell_2\| > 0$

Remarque. *On trouve aussi la notation* $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$ *que l'on évitera d'utiliser.*

Remarque. *Dans un e.v.n. autre que* $\mathbb{R}$, *ça n'aurait pas de sens de vouloir définir une limite infinie.*

Proposition. La suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ si et seulement si la suite numérique $(\|u_n - \ell\|)_n$ converge vers 0. Son intérêt est qu'elle donne un mode de démonstration. Pour montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, on cherche à majorer $\|u_n - \ell\|$ par une quantité qui tend vers 0.

Exemple. Étudier la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $M_n = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{n}} & \frac{1}{n} \\ e^{-n} & n\sin\frac{1}{n} \end{pmatrix}$. $\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Quelle norme ? $\|\cdot\|_1$? $\|\cdot\|_\infty$?

On choisit la norme $\|\cdot\|_1$.

$$\|M_n - I_2\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} e^{1/n} - 1 & \frac{1}{n} \\ e^{-n} & n\sin\frac{1}{n} - 1 \end{pmatrix} \right\|_1$$

$$= |e^{1/n} - 1| + \frac{1}{n} + e^{-n} + |n\sin\frac{1}{n} - 1|$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_1} I_2$

Exemple. Dans $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, étudier la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $f_n : t \mapsto t^n$.

- On munit E de la norme $\|\cdot\|_1$ $\qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$

$$\|f_n - 0\|_1 = \int_0^1 t^n\,dt$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_1} (t \mapsto 0)$

- On munit E de la norme $\|\cdot\|_2$

$$\|f_n - 0\|_2 = \sqrt{\int_0^1 t^{2n}\,dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2n+1}}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_2} (t \mapsto 0)$

- On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |t^n|$$

$$= 1$$

$$\cancel{\xrightarrow[n\to+\infty]{}} 0$$

donc $f_n \cancel{\xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty}} (t \mapsto 0)$

<u>Suites de fct :</u> cv uniforme : $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{?} 0$

c'est la cv dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$

<u>Rque $(f_n)_n$ n'est pas cv pour $\|\cdot\|_\infty$.</u>

Par l'absurde. On suppose $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} f \in E$

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

or $\forall t \in [0,1]$

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty$$

donc $f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(t)$

Donc $f : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t\in[0,1[\\ 1 & \text{si } t=1 \end{cases}$

C'est absurde : $f \notin E$ (non continue)

2.2 Suites bornées

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leqslant M$$

Proposition. Toute suite convergente est bornée.

2.3 Opérations sur les suites convergentes

Proposition. Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ'. Soit α et β deux scalaires. Alors la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)_n$ est convergente, de limite $\alpha\ell + \beta\ell'$.

Corollaire. L'ensemble des suites convergentes est donc un espace vectoriel.

Proposition. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\|u_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|\ell\|$.

La réciproque est bien sûr fausse.

$$\|\alpha u_n + \beta v_n - (\alpha\ell + \beta\ell')\|$$
$$\leq |\alpha| \, \|u_n - \ell\| + |\beta| \, \|v_n - \ell'\|$$

2.4 Convergence par coordonnées, des suites à valeurs dans un espace vectoriel produit

Définition. Soit E est un espace vectoriel de dimension finie p, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E. À n fixé, u_n s'écrit de façon unique sous la forme :

$$u_n = u_n^1 e_1 + u_n^2 e_2 + \cdots + u_n^p e_p$$

où $(u_n^1, u_n^2, \dots, u_n^p)$ est le p-uplet des coordonnées de u_n dans la base $\mathcal{B}$.
Pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$, la suite numérique $(u_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ est la k**-ème suite coordonnée** de $(u_n)_n$ dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème.

Avec les notations précédentes, $(u_n)_n$ converge si et seulement si les p suites-coordonnées $(u_n^k)_n$ convergent.
Dans ce cas, en notant $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et, pour tout k, $u_n^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_k$, on a :

$$\ell = \ell_1 e_1 + \ell_2 e_2 + \cdots + \ell_p e_p$$

C'est ce qu'il est naturel de penser.

Preuve:

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $u_n^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_k$

$$\|u_n - \ell\| = \left\|\sum_{k=1}^{p} (u_n^k - \ell_k) e_k\right\|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{p} |u_n^k - \ell_k| \, \|e_k\|$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

par op sur les limites dans $\mathbb{R}$

$\boxed{\Rightarrow}$ • Cas où $\|x\| = \mathrm{Max}(|x^1|, \dots, |x^p|)$

est la norme de E.

$\forall k \in \{1, \dots, p\}$.

$$|u_n^k - \ell_k| \leq \underset{i=1}{\overset{p}{\mathrm{Max}}}(|u_n^i - \ell_i|)$$

$$= \|u_n - \ell\|$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $u_n^{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_k$ dans $\mathbb{R}$

- Dans le cas où la norme est autre, on verra le résultat plus tard.

<u>Intuition</u> Pour étudier $(u_n)_n$, on peut travailler par coordonnées.

<u>**Exemple.**</u> Étudier la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n & \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} & \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix}$$

On travaille dans la bonne composante

$$A_n^{11} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$
$$= e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$
$$= e^{n\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$
$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}$$

de même A_n^{12}, A_n^{21}, A_n^{22} ---

Proposition. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E = E_1 \times \cdots \times E_p$. On peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \left(x_n^1, \ldots, x_n^p\right)$$

où les suites $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les suites composantes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
La suite $(x_n)_n$ converge vers $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p)$ si et seulement si :

$$\forall k \in \{1, \ldots, p\},\ x_n^p \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_k$$

dem.

3 Comparaison des normes

3.1 Normes équivalentes

Définition. Deux normes N_1 et N_2 sont dites **équivalentes** si et seulement s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E,\ \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$$

Remarque. *Cela revient à dire qu'il existe $\beta, \gamma > 0$ tels que :*

$$N_2 \leqslant \beta N_1 \text{ et } N_1 \leqslant \gamma N_2$$

Remarque. *C'est une relation d'équivalence.* réflexive, symétrique, transitive

Exemple. Dans $\mathbb{K}^p$, les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes.

Preuve : Soit $x = (x_1 \dots x_p) \in \mathbb{K}^p$ $\qquad \|x\|_\infty = \max_{i=1}^{p} |x_i|$

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i|$ $\qquad \forall i \quad |x_i| \leq \|x\|_\infty$

$$\leq p \|x\|_\infty$$

- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2}$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \|x\|_\infty^2}$$

$$= \sqrt{p}\, \|x\|_\infty$$

- $\|x\|_\infty = \max_{i=1}^{p} |x_i|$

$$= |x_{i_0}| \qquad \text{où } i_0 \text{ indice du max}$$

$$\leq |x_{i_0}| + \sum_{i \neq i_0} |x_i|$$

$$= \|x\|_1$$

- $\|x\|_\infty = |x_{i_0}| = \sqrt{|x_{i_0}|^2}$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2}$$

$$= \|x\|_2$$

$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalents

$\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ——

Rmq : $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ aussi par transitivité.

ou : directement (cas $p=2$) ($\mathbb{R}^2$)

$$\|(x,y)\|_1^2 = (|x|+|y|)^2 = x^2+y^2+2|x||y|$$

$$\|(x,y)\|_2^2 = \cancel{\sqrt{x^2+y^2}}\ x^2+y^2$$

On a $\|(x,y)\|_2^2 \leq \|(x,y)\|_1^2$

donc $\|(x,y)\|_2 \leq \|(x,y)\|_1$

$$\|(x,y)\|_1^2 = x^2+y^2+2|x||y|$$

$(|a|-|b|)^2 \geqslant 0$

$a^2+b^2 \geqslant 2|a||b|$

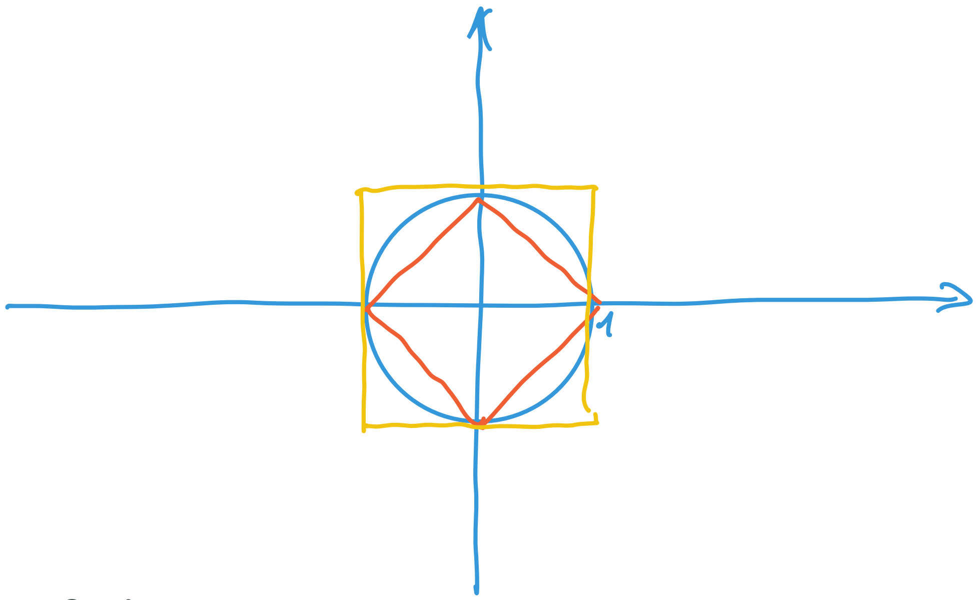
$$\leq x^2+y^2+(x^2+y^2)$$

$$\leq 2\,\|(x,y)\|_2^2$$

donc $\|(x,y)\|_1 \leq \sqrt{2}\,\|(x,y)\|_2$

Les boules ? Les boules unités pour $\|\cdot\|_1$ $\|\cdot\|_2$ $\|\cdot\|_\infty$

sont emboîtées.



$x \in B_1(0,1) \implies x \in B_2(0,1) \implies x \in B_\infty(0,1)$

Si $\|x\|_1 < 1$ alors $\|x\|_2 < 1$ puis $\|x\|_\infty < 1$

En effet : $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$

$$\|x\|_2 \leq \sqrt{2}\, \|x\|_\infty$$

donc $B_\infty(0,1) \subset B_2(0,\sqrt{2})$

$B_\infty\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \subset B_2(0,1)$

Théorème (spoiler).

Si E est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Admis par l'instant.

Rmq : • Si E est de dim finie on peut choisir la norme qu'on veut.

• Si E est de dim finie, on peut utiliser ce résultat.

Ex : Mq $\exists \alpha > 0$ tq

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \int_0^1 |P(t)| dt \leq \alpha \|P\|_\infty^{[-1,0]}$

Réponse : $P \mapsto \int_0^1 |P(t)| dt$ est une norme

$\|P\|_\infty^{[-1,0]}$ est une norme

$\mathbb{R}_n[X]$ est de dim finie

donc $\exists \alpha > 0$ tq ...

Rmq : bcp d'ex., en dim infinie, où on montre que 2 normes ne sont pas équivalentes.

3.2 Invariance du caractère borné, de la convergence

Proposition. Si deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes, alors :

- $A \subset E$ est bornée pour N_1 si et seulement A est bornée pour N_2
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour N_1 si et seulement si elle converge vers ℓ pour N_2.

Preuve: On suppose $\exists \alpha, \beta > 0$ tq $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$.

- $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $A \subset E$ bornée pour N_1.

  donc $\exists M_1$ tq $\forall x \in A \quad N_1(x) \leq M_1$

  Alors $N_2(x) \leq \beta N_1(x)$

  $\leq \beta M_1$ indép de x

  donc A est bornée pour N_2.

  $\boxed{\Leftarrow}$ de même.

- $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_1} \ell$

  ie $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0 \quad u_n \in BF_1(\ell, \varepsilon)$

  BF pour N_1

  On a $N_2 \leq \beta N_1$

  donc $BF_1\left(\ell, \frac{\varepsilon}{\beta}\right) \subset BF_2(\ell, \varepsilon)$

  en effet: Si $N_1(x-\ell) \leq \frac{\varepsilon}{\beta}$

  alors $N_2(x-\ell) \leq \beta N_1(x-\ell)$

  $\leq \cancel{\beta}\, \varepsilon$

Mq $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_2} \ell$ en revenant à la déf.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par déf de $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_1} \ell$ avec $\frac{\varepsilon}{\beta}$,

$\exists n_0$ tq $\forall n \geqslant n_0$ $u_n \in Bf_1(\ell, \frac{\varepsilon}{\beta})$
$\cap$
$Bf_2(\ell, \varepsilon)$

donc $u_n \xrightarrow[+\infty]{N_2} \ell$.

Rmq : chouette !

Dans une étude de suite, on peut remplacer une norme par une autre qui lui est équivalente.

3.3 Comparer deux normes

Méthode. *Comparer N_1 et N_2, c'est regarder s'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leqslant \alpha N_2$ et regarder s'il existe $\beta > 0$ tel que $N_2 \leqslant \beta N_1$.*

- *Pour montrer l'existence de α :*
  - *Si E est de dimension finie, on affirme l'existence de α (sans connaître sa valeur)*
  - *Sinon, on part de $N_1(x)$ que l'on cherche à majorer en faisant apparaître $N_2(x)$. Une valeur possible du coefficient α devrait apparaître.*
- *Pour montrer qu'un tel α n'existe pas, on cherche une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E telle que, par exemple, $N_1(x_n)$ soit constante et $N_2(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ou alors telle que $N_1(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ tandis que $N_2(x_n)$ reste constante.*
  Si $E = \mathbb{K}[X]$, la suite ne peut pas rester dans un sous-espace de dimension fini $\mathbb{K}_p[X]$.

Exemple. Dans $E = \mathbb{K}[X]$, montrer que les deux normes N_1 et N_2 ∞ précédentes ne sont pas équivalentes.

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{d} |a_k| \qquad N_\infty(P) = \max_{k=0}^{d} |a_k|$$

- $N_\infty(P) = |a_{k_0}|$ où k_0 indice du max
$$\leq \sum_{k=0}^{d} |a_k| = N_1(P)$$

• Mq $\forall \alpha > 0$, $N_1 \not\leq \alpha N_2$

Posons $P_n = 1 + X + \dots + X^n$

$$N_1(P_n) = (n+1) \longrightarrow +\infty$$

$$N_2(P_n) = 1 \qquad \text{cste}$$

donc N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

$\boxed{\textbf{42.32}}$

(a) Montrer que l'application :

$$N\ :\ P \quad \mapsto \quad \operatorname*{Sup}_{x\in[-2,-1]} |P(x)|$$

définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

On considère $N'\ :\ P \mapsto \operatorname*{Sup}_{x\in[1,2]} |P(x)|$, qui définit aussi une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) On considère l'application f définie sur $[-2,2]$ par :

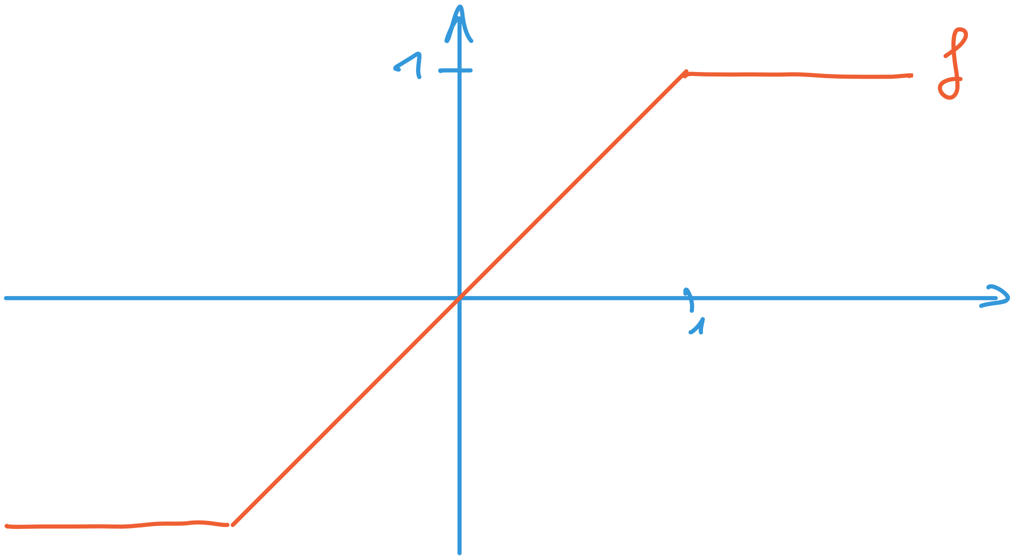
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -2 \leqslant x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

Justifier l'existence d'une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $[-2,2]$.

(c) Montrer l'existence d'une suite d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ convergeant pour N et N' vers deux limites distinctes.

(a) cf 42.1 + polynômes

(b)



f est continue : sur $[-2,-1[$, $]-1,1[$, $]1,2]$

comme fct affine par morc.

en -1 :

pour $x<-1$ $f(x)=-1 \xrightarrow[x \to -1, <]{} -1$

pour $x>-1$ $f(x)=x \xrightarrow[x \to -1, >]{} -1$

donc f est continue en -1

en 1 : de même.

f continue sur $[-2,2]$ segment donc, par le th de Weierstrass, $\exists (P_n)_n$ suite de polynômes tq $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$

ie $\|P_n - f\|_\infty^{[-2,2]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

(c) Limite de P_n pour N

Mque $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N} -1$

$$N(P_n - (-1)) = \sup_{t\in[-2,-1]} |P_n(t)+1|$$

$\forall t \in [-2,-1]$

$$|P_n(t) - (-1)| = |P_n(t) - f(t)|$$

$$\leq \| P_n - f \|_\infty^{[-2,2]}$$

indep de t

donc $N_1(P_n - (-1)) \leq \| P_n - f \|_\infty^{[-2,2]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N} (-1)$

- De même $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N'} 1$