Fondation Georges Besse

Lu 13 janvier : DS 5.

Ma 14 janvier : Math MPI* 7h45 - 9h35

Math MPI 9h50 - 11h40

Inscriptions SCEI

Espace vectoriel normé

Dans tout le chapitre, sauf mention contraire :
E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, éventuellement muni d'une norme $\|\cdot\|$.
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Normes

1.1 Définitions

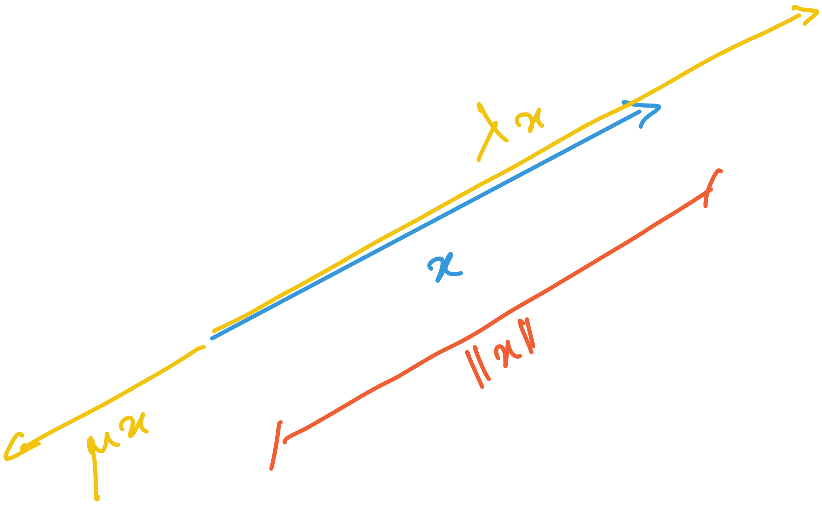
Définition. Une application $N : E \to \mathbb{R}$ est une **norme** sur E si et seulement si elle vérifie :

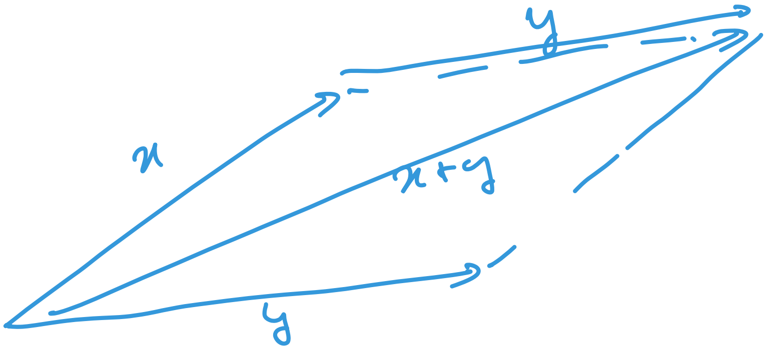
- Positivité : $\forall x \in E$, $N(x) \geqslant 0$
- Séparation : $\forall x \in E$, $N(x) = 0 \implies x = 0_E$
- Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E$, $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$
- Homogénéité : $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

Si E est muni d'une norme, on dit que c'est un **espace vectoriel normé**.

Remarque.

- *Lorsqu'il y a un risque d'ambiguité (plusieurs normes possibles), c'est le couple (E, N) qui est appelé espace vectoriel normé.*
- *On note en général $\|x\|$, et non $N(x)$, la norme du vecteur x.*
- *Lorque $\|x\| = 1$, on dit que x est un vecteur **unitaire**. Lorsque $x \neq 0$, $\dfrac{1}{\|x\|}x$ est unitaire, de même direction et même sens que x.*





Exemple. Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{K}[X]$ en posant :

$$\|P\| = \int_0^{+\infty} |P(t)|\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

- $t \mapsto |P(t)|e^{-t}$ continue (par mcx) sur $[0,+\infty[$

  au vois. de $t \to +\infty$ $\quad |P(t)|e^{-t} = o(e^{t/2})\,e^{-t}$

  $= o(e^{-t/2})$ intégr. en $+\infty$.

  donc $\|P\|$ existe.

- positivité : $\forall P \in \mathbb{K}[X]$,

  $\int_0^{+\infty} |P(t)|\, e^{-t}\, dt \geq 0 \quad$ car $|P(t)|e^{-t} \geq 0$

- séparation : On suppose que $\|P\| = 0$

  ie $\int_0^{+\infty} |P(t)|\, e^{-t}\, dt = 0$

  intégrale nulle d'une fct continue positive donc $\forall t \in [0,+\infty[\quad |P(t)|e^{-t} = 0$

donc $P(t) = 0$

P admet donc une infinité de racines,

donc $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$

- inég. triangulaire Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$

$$\|P+Q\| = \int_0^{+\infty} |P(t)+Q(t)|e^{-t}\,dt$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \left(|P(t)| + |Q(t)|\right)e^{-t}\,dt$$

par inég triang. de $|\cdot|$

$$= \|P\| + \|Q\|$$

- homogénéité. $\lambda \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$

$$\|\lambda P\| = \int_0^{+\infty} |\lambda P(t)|e^{-t}\,dt$$

$$= |\lambda|\;\|P\| \qquad \text{par linéarité de l'int}$$

Rmq : Ne pas oublier de justifier l'existence de la norme si elle est définie par $\int$, Sup, ...

Proposition. Pour tous vecteurs de E, on a :

- $\|0_E\| = 0$
- $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\| \qquad (\leqslant \|x\| + \|y\|)$
- $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x + y\| \qquad (\leqslant \|x\| + \|y\|)$

Preuve :
$$\|0_E\| = \|0_{\mathbb{K}} \cdot 0_E\|$$
$$= |0_{\mathbb{K}}| \cdot \|0_E\|$$
$$= 0_{\mathbb{R}}$$

Rmq : on n'utilise que rarement l'inég triang. inverse.

Preuve : $\|x\| = \|x - y + y\|$
$$\leq \|x-y\| + \|y\|$$
donc $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$

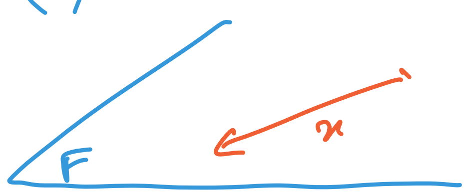
de même $\|y\| = \|y - x + x\|$
$$\leq \|y-x\| + \|x\|$$
homogénéité
$$= |-1| \, \|x-y\| + \|x\|$$
$$= \|x-y\| + \|x\|$$
donc $\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$

Ainsi $\big| \|y\| - \|x\| \big| \leq \|x-y\|$

Proposition. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors la norme sur E induit une norme sur F.

$(E, \|\cdot\|)$

$\|x\|$

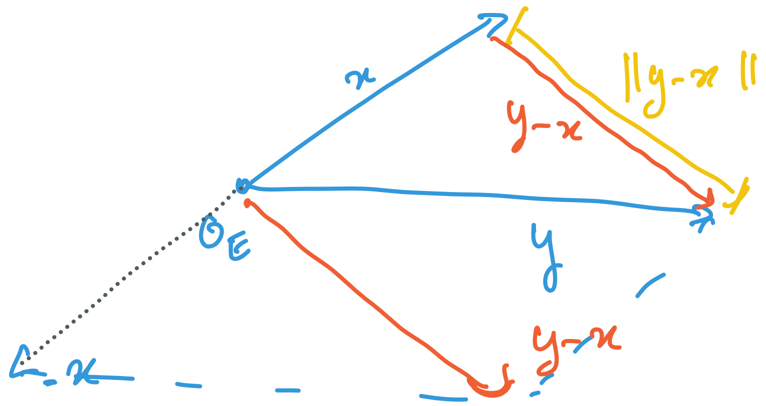


$d(x^2, x^5) = \|x^5 - x^2\| = \int_0^{+\infty} |t^5 - t^2| e^{-t} dt$

Définition. On appelle **distance associée à** $\|\cdot\|$ l'application :

$$d : \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & \|y-x\| \end{array}$$

dépend de $\|.\|$.



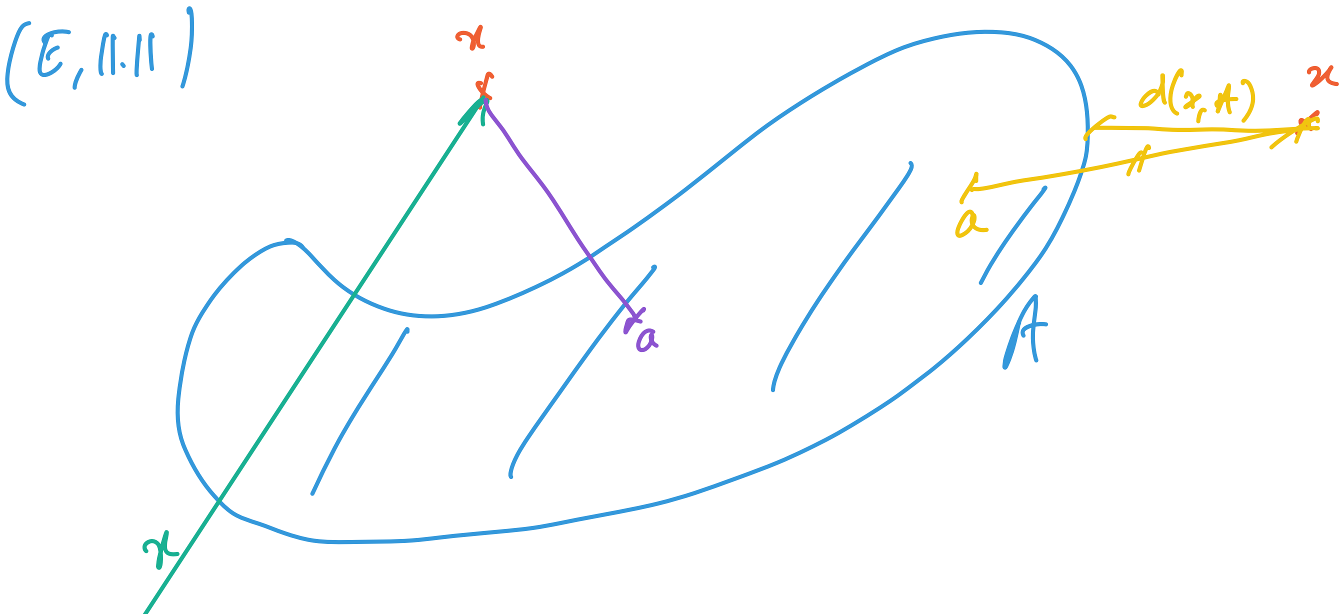
Proposition. Pour tous vecteurs de E, on a :

- $d(x,y) \geqslant 0$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,y) = 0 \implies x = y$
- $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

Définition. Soit A une partie non vide de E, et $x \in E$. On appelle **distance de** x **à** A la quantité :

$$d(x,A) = \mathrm{Inf}\{\|x-a\|,\ a \in A\}$$

Remarque. *Si $x \in A$, alors $d(x,A) = 0$, mais on verra que la réciproque est fausse en général.*



Si $A \neq \emptyset$, $\{\|x-a\|, a \in A\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide, minorée par 0 donc admet un Inf.

1.2 Norme euclidienne associée à un produit scalaire

Théorème.

Si E est un espace préhilbertien réel, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne son produit scalaire, alors l'application définie par :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

définit une norme sur E, appelée **norme euclidienne** associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

forme bilinéaire symétrique
positive définie positive.

C'est la norme des physiciens pour le produit scalaire usuel.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$
$$= \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

1.3 Les normes usuelles

1.3.1 Normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$ $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^3$

Définition. Pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, on définit :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i|, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2}, \qquad \|x\|_\infty = \underset{1 \leqslant i \leqslant p}{\operatorname{Max}} |x_i|$$

appelées respectivement les **normes 1, 2 et infinie**.

Théorème.

$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^p$.

Mque $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{C}^2$

- $\|.\|_\infty$ est défini car max d'un nb fini de termes.
- positivité Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$

$$\|(z_1,z_2)\|_\infty = \operatorname{Max}(|z_1|, |z_2|) \geqslant |z_1| \geqslant 0$$

- séparation : Soit $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$ tq $\|(z_1,z_2)\|_\infty = 0$

ie $\operatorname{Max}(|z_1|, |z_2|) = 0$

$\forall i = 1,2 \qquad 0 \leq |z_i| \leq \underbrace{\|(z_1,z_2)\|_\infty}_{=0}$

donc $|z_i| = 0$ ie $z_i = 0$

- inég triangulaire ⚠

Soit $(z_1,z_2), (z_1', z_2') \in \mathbb{C}^2$

$$\|(z_1,z_2) + (z_1',z_2')\|_\infty = \operatorname{Max}(|z_1+z_1'|, |z_2+z_2'|)$$

$\leq$ - - - Faux

or $\forall i = 1,2$

$$|z_i + z'_i| \leq |z_i| + |z'_i|$$
$$\leq \|(z_1,z_2)\|_\infty + |z'_i|$$
$$\leq \|(z_1,z_2)\|_\infty + \|(z'_1,z'_2)\|_\infty$$

indépendant de i

donc $\max\limits_{i=1,2} |z_i + z'_i| \leq \|(z_1,z_2)\|_\infty + \|(z'_1,z'_2)\|_\infty$

$$\max_{i=1,2} |z_i + z'_i| = \|(z_1,z_2)+(z'_1,z'_2)\|_\infty$$

- homogénéité ok.

Rédaction : $\forall (z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2,\ \lambda \in \mathbb{C}$

$$\max(|\lambda z_1|, |\lambda z_2|) = |\lambda| \max(|z_1|,|z_2|)$$

Plus précis, pour un max :

Soit $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

On note i_0 l'indice (1 ou 2) tq

$$\|(z_1,z_2)\| = |z_{i_0}|$$

On a donc $|\lambda z_i| = |\lambda|\,|z_i|$

$$\leq |\lambda|\,|z_{i_0}| = |\lambda|\,\|(z_1,z_2)\|_\infty$$

indép de i

donc $\max(|\lambda z_1|, |\lambda z_2|) \leq |\lambda| \, \|(z_1, z_2)\|_\infty$

Et il y a égalité pour ∞

<u>Remarque:</u>

Dans $\mathbb{R}$ ev, il y a une norme naturelle

la val. absolue

Dans $\mathbb{C}$, le module.

1.3.2 Normes usuelles sur l'ensemble des matrices

Exemple. Sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, en notant $M = (m_{ij})_{\substack{1\leqslant i\\ j\leqslant p}}$, on définit :

$$\|M\|_1 = \sum_{\substack{1\leqslant i\\ j\leqslant p}} |m_{ij}|, \qquad \|M\|_2 = \sqrt{\sum_{\substack{1\leqslant i\\ j\leqslant p}} |m_{ij}|^2} = \sqrt{\operatorname{tr}(M^\top M)}, \qquad \|M\|_\infty = \operatorname*{Max}_{\substack{1\leqslant i\\ j\leqslant p}} |m_{ij}|$$

Ce sont des normes.

Cas où $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\quad E = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

Rmq ! $(A, B) \longmapsto \operatorname{tr}(A^\top B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$

1.3.3 Normes usuelles sur l'espace des polynômes

Exemple. Dans $E = \mathbb{K}[X]$, on définit pour $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$:

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i| \text{ et } N_\infty(P) = \underset{i \in \{0,\dots,n\}}{\text{Max}} |a_i|$$

Ce sont des normes sur E.

Mqe N_1 est une norme $\qquad N_1(P) = \sum_{i=0}^{+\infty} |a_i|$

- Si $P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$ est un polynôme, alors les coeff sont nuls à partir d'un certain rang donc la somme est finie
- positivité :
- séparation : Soit P tq $N_1(P) = 0$

  ie $\sum_{i=0}^{+\infty} |a_i| = 0$

  Somme nulle de termes positifs

  donc $\forall i \quad a_i = 0$ ie $P = 0$
- inég triang
- homogénéité

1.3.4 Normes usuelles sur les espaces de fonctions

Exemple. Sur $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, on définit pour $f \in E$:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x, \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x}, \qquad \|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

Ce sont des normes sur E.

Lemme. Pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$:

$$\operatorname{Sup}\{kx,\ x \in A\} = k \operatorname{Sup}(A)$$

Pour jé : 42.1 et 42.8

Lemme: (il fournit l'homogénéité de $\|.\|_\infty$)

Preuve: On suppose A majorée, $\operatorname{Sup}(A) < +\infty$

- $\forall x \in A$, $kx \leq \underbrace{k \operatorname{Sup}(A)}_{\text{indep de } x}$ car $k \geq 0$

  donc $k\operatorname{Sup}(A)$ majore $\{kx, x \in A\}$

  le Sup est le plus petit des majorants.

  donc $\operatorname{Sup}\{kx, x\in A\} \leq k \operatorname{Sup}(A)$

- Si $k=0$, trivial

- On suppose $k>0$

  $\forall x \in A$, $x = \frac{1}{k} kx$

  $\leq \frac{1}{k} \operatorname{Sup}\{kx, x \in A\}$

  indep de x

  donc $\operatorname{Sup} A \leq \frac{1}{k} \operatorname{Sup}\{kx, x \in A\}$

Remarque: Ces normes sont en particulier des normes sur l'espace des fct polynomiales.

Mque $N_1(P) = \int_0^1 |P(t)|\, dt$ norme

Remarque. *Hormis cette proposition, on ne peut pas faire de calcul directement avec des* Sup*. On travaille sur le « supande ».*

Définition. Pour X ensemble non vide, on note $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{K}$ qui sont bornées, c'est-à-dire pour lesquelles :

$$\exists M \geqslant 0,\ \forall x \in X,\ |f(x)| \leqslant M$$

Théorème.

> $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel, que l'on peut munir d'une norme en posant :
>
> $$\|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x \in X} |f(x)|$$

Remarque. *Il faut savoir rédiger la démonstration de l'inégalité triangulaire.*

cf 42.1

$$|\lambda f(x) + \mu g(x)| \leq |\lambda| \underbrace{|f(x)|}_{\leq M} + |\mu| \underbrace{|g(x)|}_{\leq N}$$

$$\leq |\lambda| M + |\mu| N.$$ indep de x

1.4 Boules

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et d la distance associée. Pour $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}$, on définit :

- la **boule ouverte de centre** a **et de rayon** $r > 0$:

$$B(a,r) = \{x \in E,\ d(a,x) < r\} = \{x \text{ tq } \|x-a\| < r\}$$

- la **boule fermée de centre** a **et de rayon** $r \geqslant 0$:

$$BF(a,r) = \{x \in E,\ d(a,x) \leqslant r\} = \overline{B(a,r)} = \bar{B}(a,r)$$

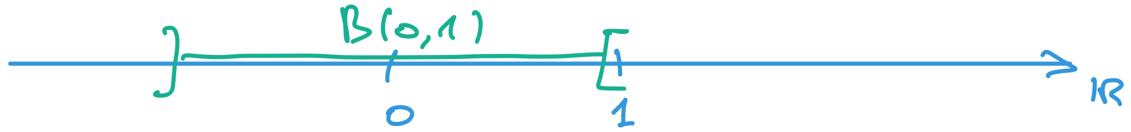
- la **sphère de centre** a **et de rayon** $r \geqslant 0$:

$$S(a,r) = \{x \in E,\ d(a,x) = r\}$$

Remarque. *Un singleton est une boule fermée.*

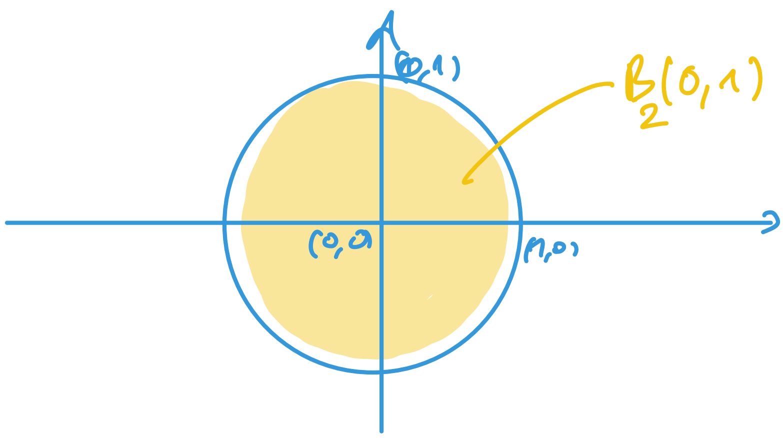
Exemple. Représenter la boule $B(0,1)$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ muni de sa norme usuelle.

$$x \in B(0,1) \iff |x-0| < 1 \iff -1 < x < 1$$



Exemple. Représenter la boule $B(0,1)$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de ses normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$.

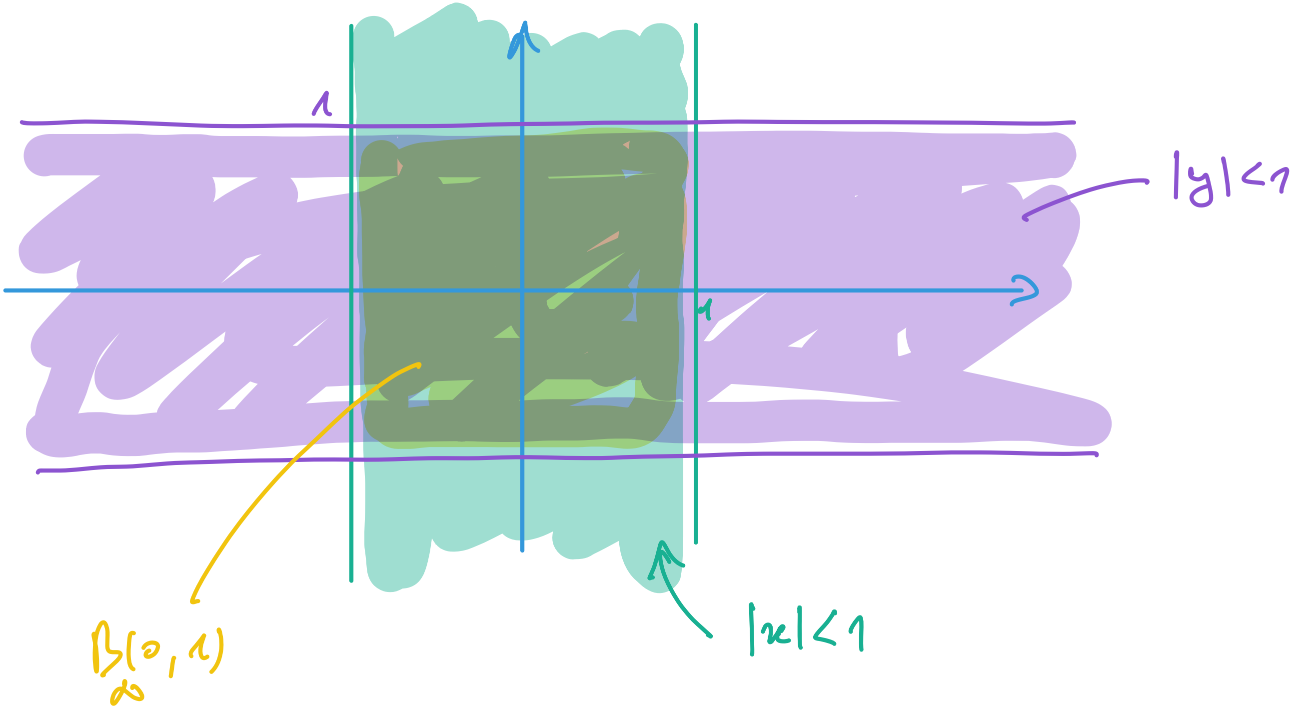
$$(x,y) \in B_2(0,1) \iff \|(x,y) - (0,0)\|_2 < 1$$
$$\iff \|(x,y)\|_2 < 1$$
$$\iff \sqrt{x^2+y^2} < 1$$
$$\iff x^2 + y^2 < 1$$



$$(x,y) \in B_\infty(0,1) \iff \|(x,y)-(0,0)\| < 1$$

$$\iff \max(|x|,|y|) < 1$$

$$\iff |x| < 1 \text{ et } |y| < 1$$

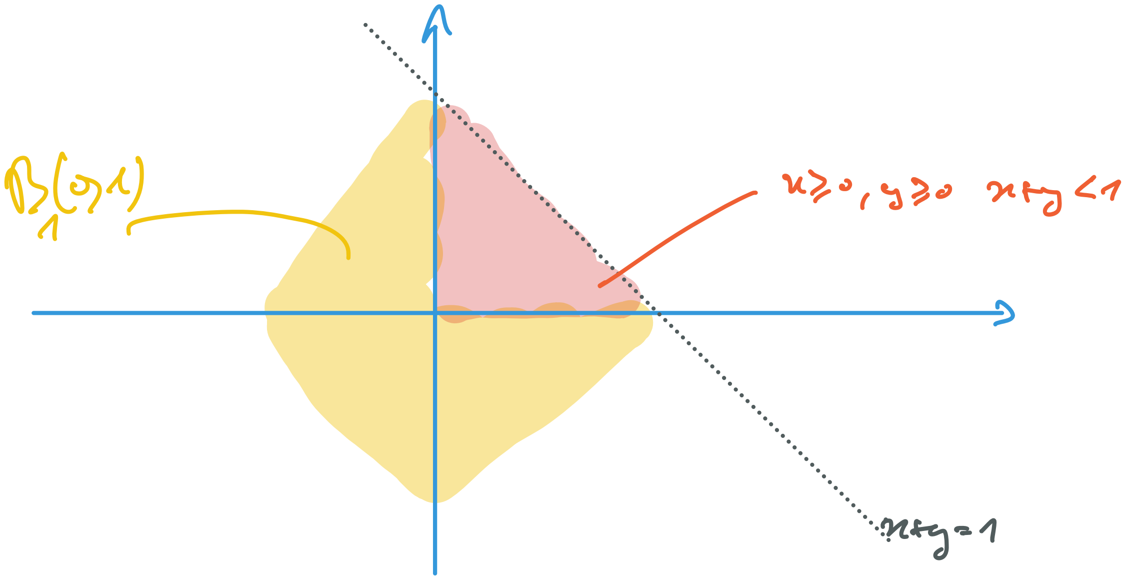


$$O_E = (0,0)$$

$$(x,y) \in B_1(0,1) \iff \|(x,y)-(0,0)\|_1 < 1$$

$$1_{\mathbb{R}} = 1 \qquad \iff |x| + |y| < 1$$

$$\iff \begin{cases} x+y<1 \text{ et } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \text{ou} \\ -x+y<1 \text{ et } x \leq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \text{ou} \\ -x-y<1 \text{ et } x \leq 0 \text{ et } y \leq 0 \\ \text{ou} \\ x-y<1 \text{ et } x \geq 0 \text{ et } y \leq 0 \end{cases}$$



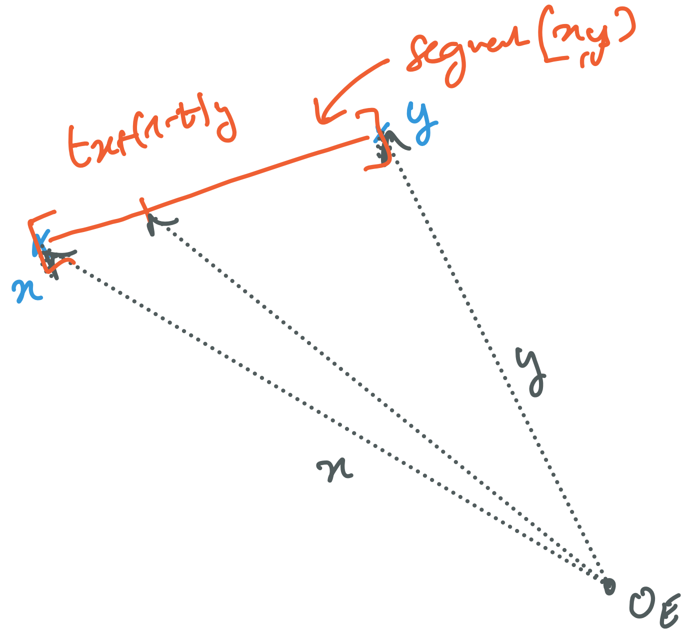
<u>Rmq:</u>

$$B_1(0,1) \subset B_2(0,1) \subset B_\infty(0,1) \subset B_2(0,\sqrt{2})$$

Définition. Soit A une partie de E. On dit que A est **convexe** si et seulement si :

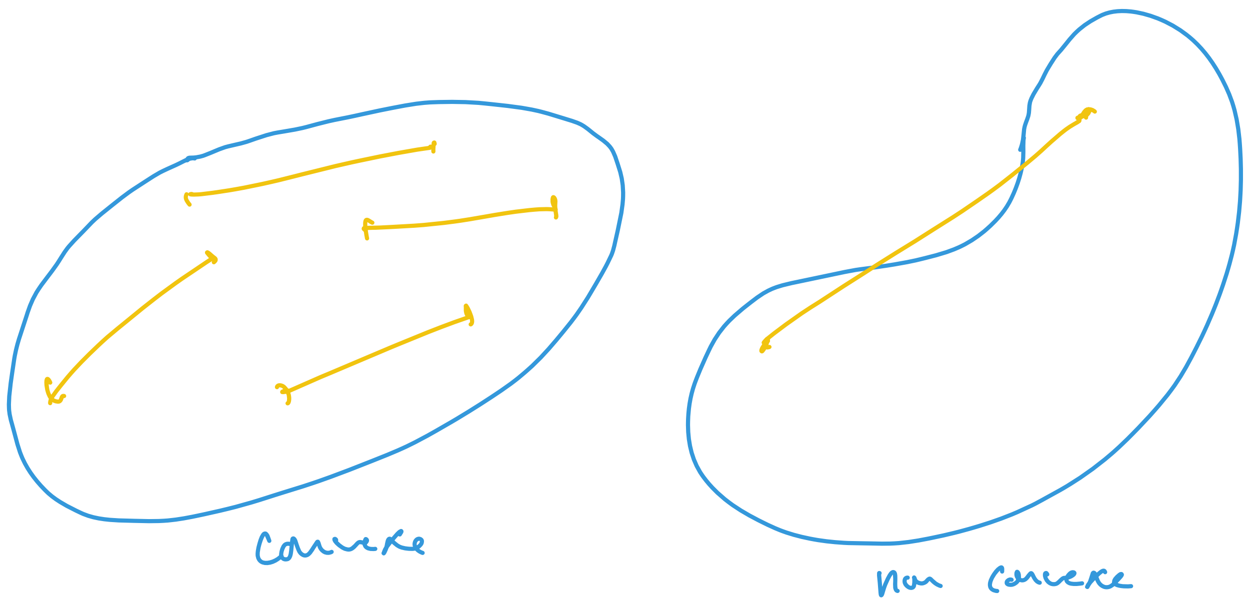
$$\forall x, y \in A,\ \forall t \in [0,1],\ tx + (1-t)y \in A$$

Proposition. Toute boule B est une **partie convexe** de E. 42.2



$[x,y]$ est paramétré par $\{tx+(1-t)y,\ t\in[0,1]\}$

A convexe $\Leftrightarrow$ tout segment qui joint 2 points de A est inclus dans A.



$GL_n(\mathbb{C})$ $\quad$ $D_n(\mathbb{K})$ $\quad$ Diagonalisable ?