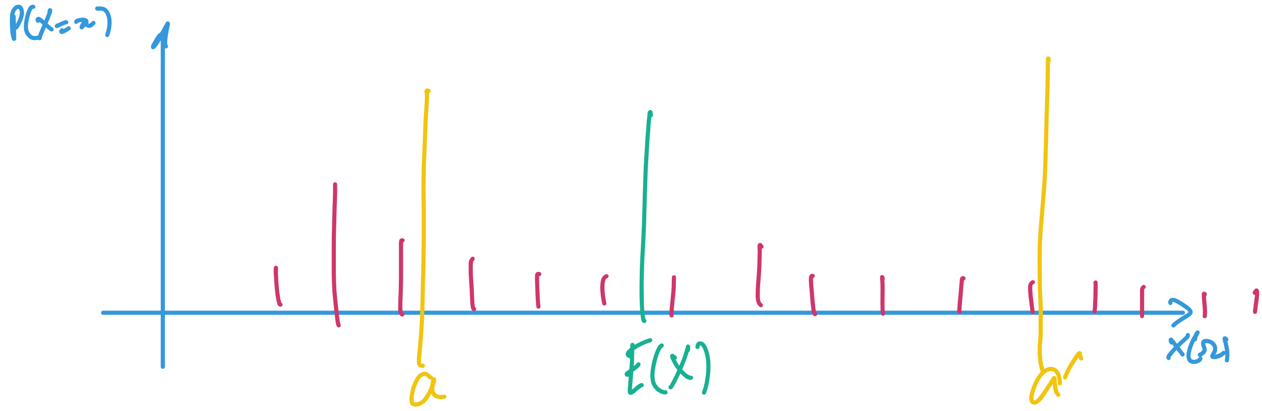


4 Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres

4.1 Inégalité de Markov

Inégalité de Markov.

Soit X une v.a. réelle discrète d'espérance finie. Alors, pour tout $a > 0$:

$$P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{E}(|X|)}{a}$$

Remarque. *C'est une majoration de la probabilité que la v.a. prenne de grandes valeurs.*

$$E(|X|) = \sum_{x \in X(\Omega)} |x| \, P(X=x) \quad \text{par transfert.}$$

$$= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| \geq a}} |x| \, P(X=x) + \underbrace{\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| < a}} |x| \, P(X=x)}_{\geq 0}$$

$$\geq \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| \geq a}} \cancel{|x|}\, a \, P(X=x)$$

$$= a \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| \geq a}} P(X=x)$$

$$= a \, P\Big(\bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| \geq a}} (X=x) \Big)$$

$$= a \, P(|X| \geq a)$$

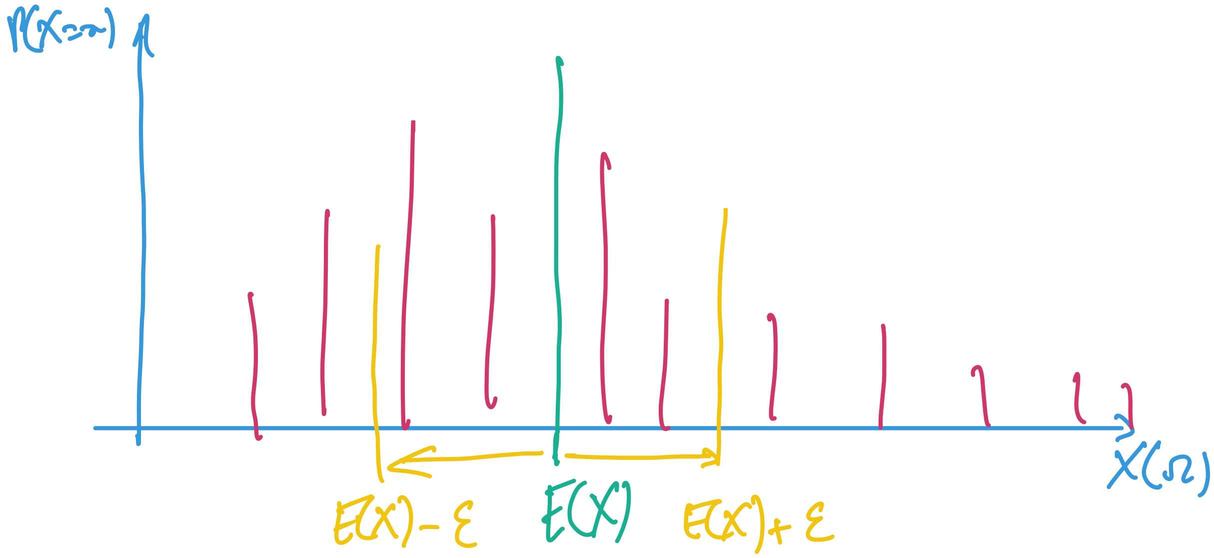
Rmq : Si X est positive, $P(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$

4.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

> Soit X une variable aléatoire réelle discrète, telle que X^2 soit d'espérance finie.
> Alors, pour tout $\varepsilon > 0$:
> $$P\big(|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Remarque. *L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de comprendre ce que mesure la variance : pour $\varepsilon > 0$ fixé, la probabilité que l'écart entre X et $\mathrm{E}(X)$ soit supérieur à ε est d'autant plus petite que $\mathrm{V}(X)$ est faible : la variance donne donc une indication de la dispersion de X autour de son espérance, i.e. sa plus ou moins forte tendance à s'écarter de sa moyenne.*
L'écart-type, qui mesure aussi la dispersion de X, présente l'intérêt de s'exprimer dans la même unité que les valeurs prises par la variable aléatoire X.



$Y = X - E(X)$: on applique l'inég de Markov

$X \in L^2$ donc $Y^2 \in L^1$

$$P(|Y|^2 \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \frac{E(Y^2)}{\varepsilon^2}$$

i.e. $$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E((X-E(X))^2)}{\varepsilon^2} = \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

$$\omega \in (|Y|^2 \geqslant \varepsilon^2) \iff |Y(\omega)|^2 \geqslant \varepsilon^2$$
$$\iff |Y(\omega)| \geqslant \varepsilon$$
$$\iff \omega \in (|Y| \geqslant \varepsilon)$$

Exemple. Pour $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, montrer que :

$$P\left(X \leqslant \frac{\lambda}{2}\right) \leqslant \frac{4}{\lambda} \text{ et } P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

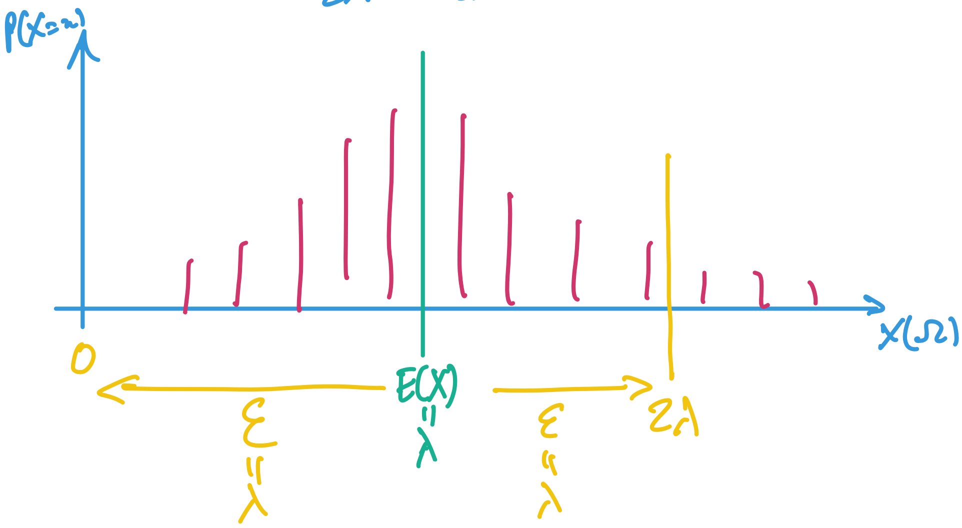
Mque $P(X \geqslant 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$

idée Markov

X à val positive

$$P(X \geqslant 2\lambda) \leq \frac{E(X)}{2\lambda} = \frac{\lambda}{2\lambda} = \frac{1}{2}$$

idée 2 :



$$\cancel{(X \geqslant 2\lambda) = (|X - E(X)| \geqslant \lambda)}$$

$$\omega \in (|X - E(X)| \geqslant \lambda)$$

$$\iff |X(\omega) - E(X)| \geqslant \lambda$$

$$\iff d(X(\omega), E(X)) \geqslant \lambda$$

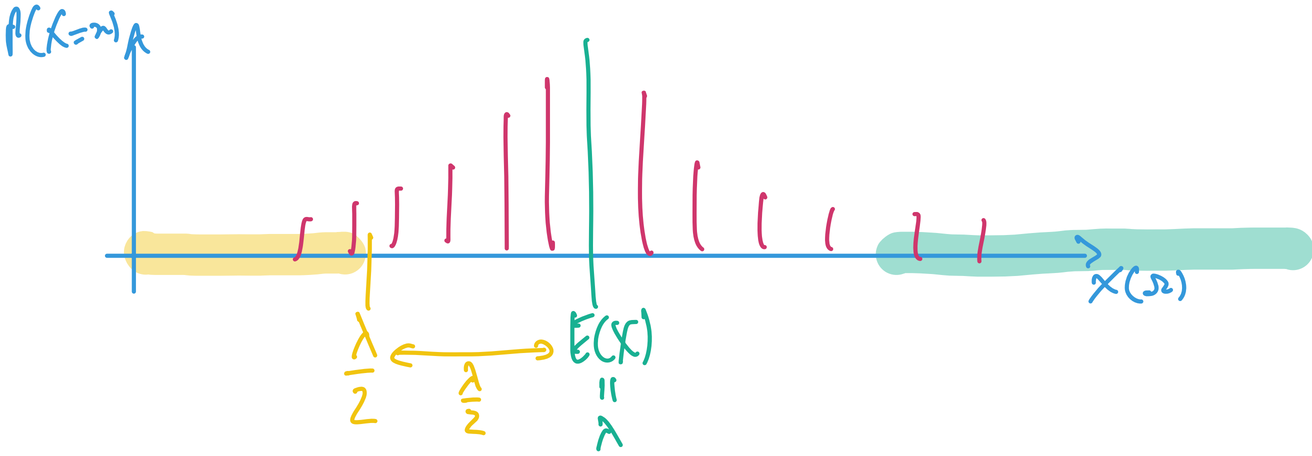
$$\iff X(\omega) \notin \left]E(X) - \lambda, E(X) + \lambda\right[$$

$$\iff X(\omega) \leq \underbrace{E(X) - \lambda}_{0} \text{ ou } X(\omega) \geqslant \underbrace{E(X) + \lambda}_{2\lambda}$$

$$\iff \omega \in \underbrace{(X \leq 0)}_{=(X=0)} \cup (X \geqslant 2\lambda)$$

$$(X \geq 2\lambda) \subset (X=0) \cup (X \geq 2\lambda)$$
$$= (|X - E(X)| \geq \lambda)$$

donc $P(X \geq 2\lambda) \leq P(|X - E(X)| \geq \lambda)$
$$\leq \frac{V(X)}{\lambda^2}$$
$$= \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$



$$(X \leq \tfrac{\lambda}{2}) \subset (|X - E(X)| \geq \tfrac{\lambda}{2})$$

$$(|X - E(X)| \geq \tfrac{\lambda}{2})$$
$$= (X \leq E(X) - \tfrac{\lambda}{2}) \cup (X \geq E(X) + \tfrac{\lambda}{2})$$
$$\supset (X \leq \tfrac{\lambda}{2})$$

donc $P(X \leq \frac{\lambda}{2}) \leq P(|X - E(X)| \geq \frac{\lambda}{2})$
$$\leq \frac{V(X)}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} = \frac{4}{\lambda}$$

4.3 Loi faible des grands nombres

Loi faible des grands nombres.

indépendantes

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie. On note $m = \mathrm{E}(X_1)$ (les espérances sont toutes égales), $\sigma = \sigma(X_1)$ (les écarts-types sont tous égaux) et :

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

et donc :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\frac{S_n}{n}$ = moyenne de $(X_1 \cdots X_n)$

$$\frac{S_n(\omega)}{n} = \frac{1}{n}\left(X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)\right)$$

Preuve: $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$ linéarité

$= m$

$V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(X_1 + \cdots + X_n)$ X_i sont indépendants

$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k)$

$= \frac{1}{n}\sigma^2$

Donc Bienaymé-Tchebychev

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\frac{1}{n}\sigma^2}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

§ 5.5

Remarque. *Pour déterminer la probabilité d'un événement A, l'idée courante consiste à répéter l'expérience aléatoire un grand nombre de fois, et observer le nombre d'apparition de l'événement A. Lorsque le nombre d'expérience augmente, la fréquence d'apparition de A devrait se rapprocher de la probabilité de A.*
La loi faible des grands nombres formalise et quantifie cette intuition : En notant $p = P(A)$ et X_k l'indicatrice de A, on a $X_k \sim \mathscr{B}(p)$ et X_k représente le nombre de fois que A a été observé à l'expérience k. Ainsi, la fréquence d'apparition de A au cours des n répétitions est la variable aléatoire :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Par la loi faible des grands nombres,

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|M_n - p| < \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

On peut dire que « M_n tend vers $p = P(A)$ » presque sûrement.