Tic-Tac-Tic-Tac

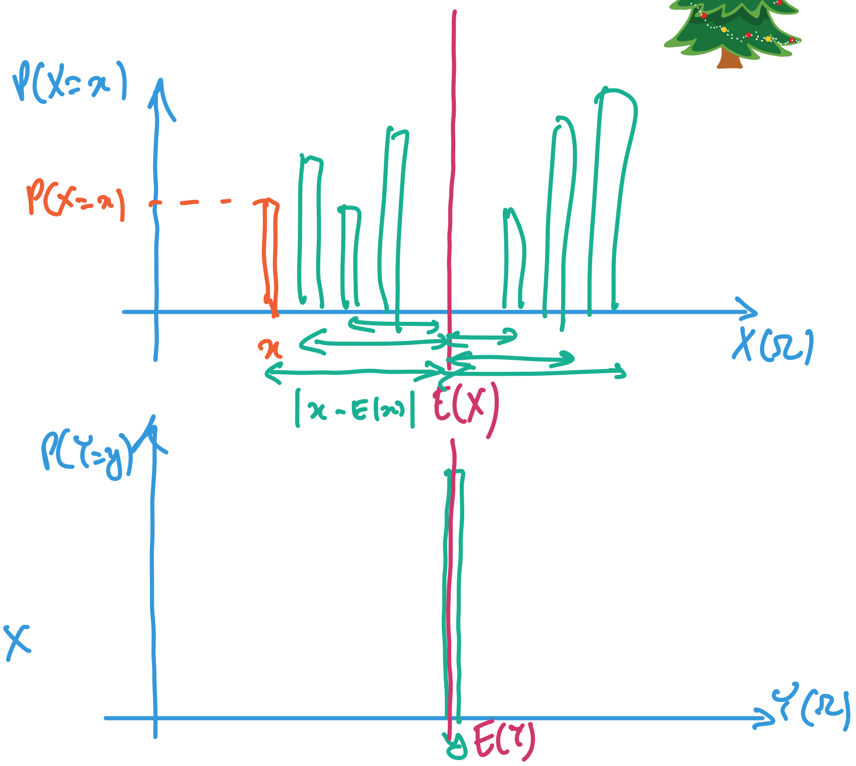
Pour gé : 84.4.

va, loi $\leftrightarrow$ distribution de proba

$E\left(\cancel{|X-E(X)|}\right)$

$V(X) = E\left((X-E(X))^2\right)$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ homogène à X



2 Variance

On s'intéresse maintenant aux seules v.a. réelles.

2.1 Définitions

Lemme. Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

Définition. On note $X \in L^2$ pour dire que X^2 est d'espérance finie.

Remarque.

- *On a donc $L^2 \subset L^1$.*
- *Pour X v.a. réelle discrète, on dit que X admet un moment d'ordre p lorsque $\mathrm{E}(|X|^p) < +\infty$. Dans ce cas, on appelle* ***moment d'ordre*** *p* ***de*** *X la quantité $\mathrm{E}(X^p)$.*
- *Admettre un moment d'ordre 1, c'est être d'espérance finie ; et alors le moment d'ordre 1, c'est l'espérance.*

Preuve : (classique) $(a-b)^2 \geq 0$ donc $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$

$\forall \omega \in \Omega \quad |X(\omega)| = |X(\omega)| \times 1$

$\leq \frac{1}{2}\left(X(\omega)^2 + 1^2\right)$

donc $|X| \leq \frac{1}{2}(X^2+1)$

X^2 d'esp. finie donc $\frac{1}{2}(X^2+1)$ aussi

donc par majoration, $|X|$ est d'esp. finie.

$L^2 = \{\text{va } X \text{ tq } E(X^2) < +\infty\} \subset L^1 = \{X \text{ tq } E(|X|) < +\infty\}$

$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$ $E(XY)$ est presque un produit scalaire.

2.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soit $X, Y \in L^2$. Alors :

- XY est d'espérance finie
- $|\mathrm{E}(XY)| \leqslant \sqrt{\mathrm{E}(X^2)}\,\sqrt{\mathrm{E}(Y^2)}$.

Remarque. *On peut aussi vérifier qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si X et Y sont proportionnelles presque sûrement :*

$$P(X=0)=1 \text{ ou } \exists a \text{ t.q. } P(Y=aX)=1$$

On mesure, d'une certaine façon, les dépendances affines en regardant si on est « loin » de l'égalité dans l'inégalité, après centrage.

Preuve : • $|XY| \leq \frac{1}{2}(X^2+Y^2)$

avec $X, Y \in L^2$

donc $|XY|$ est d'esp. finie

Posons $Z = (\lambda X + Y)^2$

$= \lambda^2 X^2 + 2\lambda XY + Y^2$

CL de 3 va d'esp. finie donc $Z \in L^1$

$0 \leq E(Z)$ car Z va positive

$= \lambda^2 E(X^2) + 2\lambda E(XY) + E(Y^2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

par linéarité

polynomiale en λ

1er cas : Si $E(X^2) \neq 0$

polynomiale de degré 2, de signe ≥ 0

donc $\Delta \leq 0$

ie $E(XY)^2 - E(X^2)E(Y^2) \leq 0$

donc $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$

2e cas si $E(X^2) = 0$

On a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $2\lambda E(XY) + E(Y^2) \geq 0$

donc $E(XY) = 0$

et l'inégalité est triviale : $0 \leq 0$

Remarque : Cas d'égalité ?

il correspond au cas où $\Delta = 0$

ie $\exists \lambda_0$ racine double de $E((\lambda X+Y)^2)$

$\exists \lambda_0$ tq $E((\lambda_0 X+Y)^2) = 0$

va positive, d'espérance nulle

donc $\lambda_0 X + Y$ est nulle presque sûrement

(ie $P(\lambda_0 X+Y=0) = 1$)

donc $Y = -\lambda_0 X$ p.s

"X et Y colinéaires presque-sûrement".

2.3 Variance et écart-type

Remarque. *Si* $\mathrm{E}(X)$ *est la « valeur moyenne » de la v.a.* X*, on souhaite contrôler l'écart entre la valeur de* X *et cette moyenne :* $|X - \mathrm{E}(X)|$*. En pratique, le carré* $(X - \mathrm{E}(X))^2$ *est bien plus facilement manipulable et permet de connaître la valeur absolue.*

Définition. Pour $X \in L^2$, on définit la **variance** de X par :

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right) \\ &= \mathrm{E}(X^2) - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2 \end{aligned}$$

et l'**écart-type** de X :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

Remarque.

- *On a vu que l'espérance est un indicateur de position des valeurs d'un v.a. La covariance et l'écart-type sont des* ***indicateurs de dispersion*** *de ces valeurs.*
- *On dit qu'une v.a. est* ***réduite*** *lorsque sa variance vaut 1.*

Preuve: $E(X)$ désigne un scalaire noté m

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left((X - E(X))^2\right) \\ &= E\left(X^2 - 2E(X)X + E(X)^2\right) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \end{aligned}$$

linéarité

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left((X-m)^2\right) \\ &= E\left(X^2 - 2mX + m^2\right) \\ &= E(X^2) - 2mE(X) + m^2 \end{aligned}$$

par linéarité.

$$= E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

défini si $E(X^2) < +\infty$

Remarque: $V(X) \geq 0$ toujours !! E(truc positif)

Proposition. Si $\sigma(X) > 0$, la v.a. $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

$\overset{\shortparallel}{Y}$ d'espérance 0 de variance 1

$$E(Y) = \frac{1}{\sigma(X)} E(X - m)$$
$$= \frac{1}{\sigma(X)} \left(E(X) - m \right)$$
$$= 0$$

$$V(Y) = \frac{1}{\sigma^2} V(X - m)$$
$$= \frac{1}{\sigma^2} V(X)$$
$$= 1$$

Remarque. *Pour calculer une variance, on sera amené à calculer $\mathrm{E}(X^2)$; il sera alors souvent utile de remarquer pour réaliser ce calcul de série que $X(X-1) = X^2 - X$, donc par linéarité de l'espérance, $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{E}(X(X-1)) + \mathrm{E}(X)$.*

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

par transfert.

$$= E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2$$

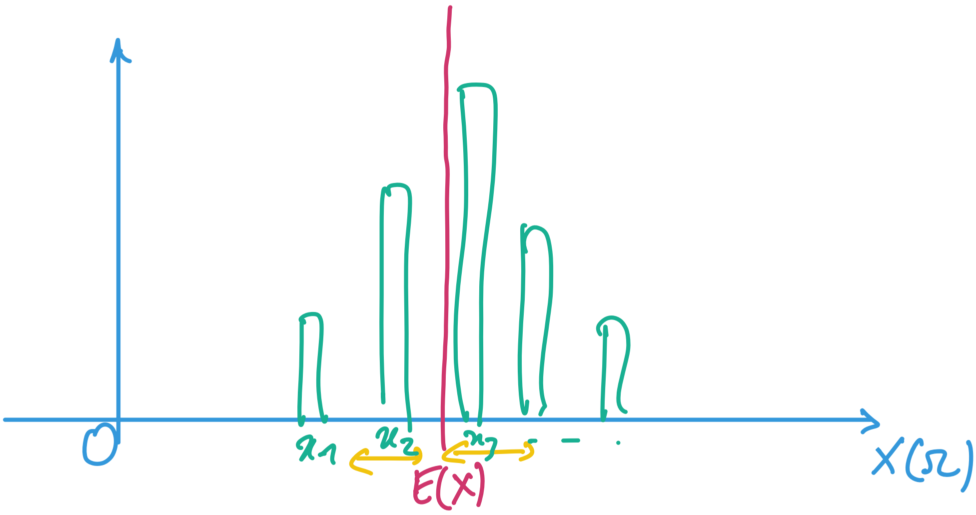
2.4 Dilatation, invariance par translation, somme de v.a. indépendantes

Proposition. Soit $X \in L^2$. Pour tout a, b réels :

$$\mathrm{V}(aX + b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$$

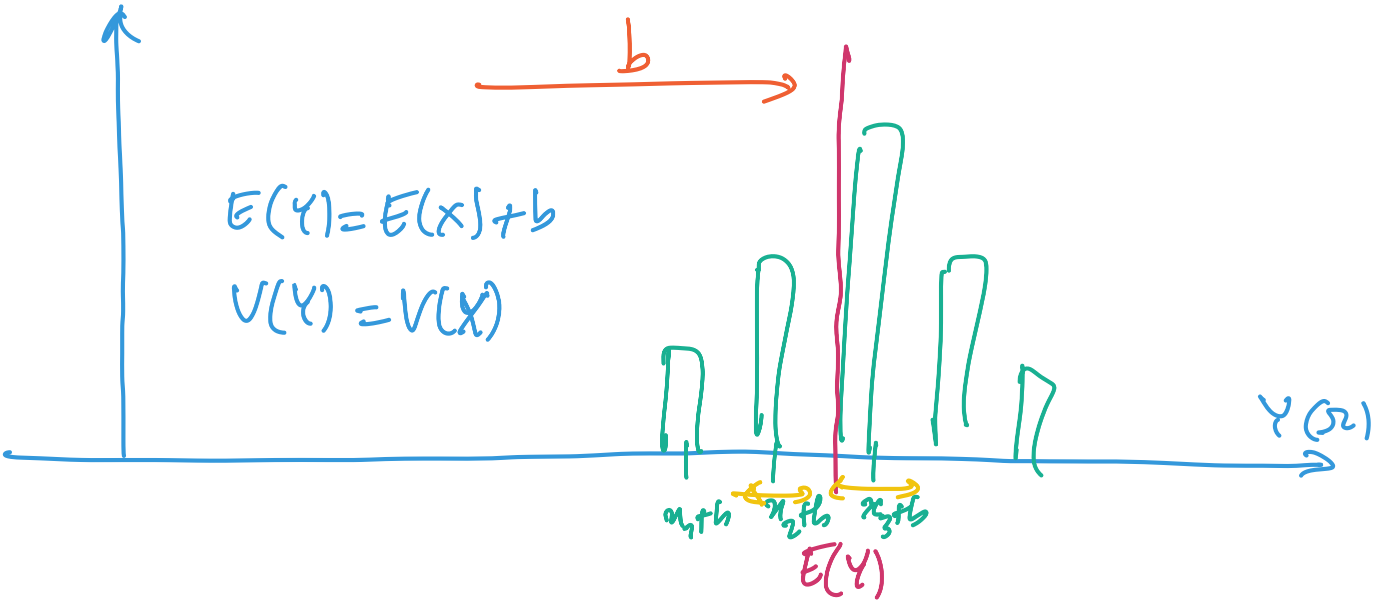
$$V(X+b) = V(X) \qquad Y = X+b$$

$$V(aX) = a^2\,V(X)$$



$$E(Y) = E(X) + b$$

$$V(Y) = V(X)$$



$$\begin{aligned}
V(aX+b) &= E\left(\left(aX+b - \underbrace{E(aX+b)}\right)^2\right)\\
&= E\left(\left(aX+b - aE(X) - b\right)^2\right)\\
&= E\left(a^2\left(X - E(X)\right)^2\right)\\
&= a^2\,V(X)
\end{aligned}$$

Proposition. Soit $X, Y \in L^2$, indépendantes

$$\text{Alors } X+Y \in L^2 \text{ et : } \mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y)$$

Remarque. *Ce résultat se généralise à une somme finie de v.a. indépendantes.*

Preuve : $V(X+Y) = E\left(\left(X+Y-E(X+Y)\right)^2\right)$

$= E\left(\left(\underbrace{X-E(X)} + \underbrace{Y-E(Y)}\right)^2\right)$

$= E\Big(\left(X-E(X)\right)^2 + \left(Y-E(Y)\right)^2$

$+ 2\left(XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)\right)\Big)$

$= V(X) + V(Y)$

$+ 2\left(E(XY) - 2E(X)E(Y) + E(X)E(Y)\right)$

$= V(X) + V(Y)$

car $X \perp\!\!\!\perp Y$ donc $E(XY) = E(X)E(Y)$

Rmq : "récurrence ~~évidente~~"

(il faut rédiger 1 récurrence par copie)

"Mque $I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$" $\neq$ "Calculer I_n"

Cas de n va :

Mque **Si** $X_1 \dots X_n$ sont indép,

alors $V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$

- Pour $n=1$, $n=2$
- On suppose la prop vraie pour $n \in \mathbb{N}$

Soit $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ indép.

$$V(\underbrace{X_1 + \dots + X_n} + X_{n+1})$$

$= V(Y + X_{n+1})$ où $Y = X_1 + \dots + X_n$

$= V(Y) + V(X_{n+1})$ parce que $Y \perp\!\!\!\perp X_{n+1}$ lemme des coalitions. et cas $n=2$

$= V(X_1) + \dots + V(X_n) + V(X_{n+1})$ par H.R.

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$ $V(X)$?

Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ suite i.i.d $\mathcal{B}(p)$

alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$

donc $X \sim X_1 + \dots + X_n$

donc $V(X) = V(X_1 + \dots + X_n)$

$= V(X_1) + \dots + V(X_n)$ car (X_i) indép

$= n \cdot pq$.

2.5 Variance des lois usuelles

Proposition.

- Si $X \sim \mathscr{U}([\![1,n]\!])$, alors $\mathrm{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.
- Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors $\mathrm{V}(X) = p(1-p)$.
- Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, alors $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$.
- Si $X \sim \mathscr{G}(p)$, alors $\mathrm{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.
- Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, alors $\mathrm{V}(X) = \lambda$.

Pour $X \sim \mathscr{G}(p)$. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ $\quad q = 1-p$

Calculons $E(X(X-1)) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n(n-1)\, P(X=n)$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, q^{n-1}\, p$$

On connaît $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \forall x \in]-1,1[$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2}$$

donc $E(X(X-1)) = pq \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) q^{n-2}$

$$= pq \frac{2}{(1-q)^3}$$

$$= \frac{2q}{p^2}$$

Alors : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$= E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2$$

$$= \frac{2q}{p^2} + \frac{p}{p^2}\cancel{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{q}{p^2}$$

Pour $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$E(X(X-1)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n(n-1)\, P(X=n) \quad \text{par transfert}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-2)!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda}$$

$$= \lambda^2$$

Puis $V(X) = \overbrace{E(X(X-1)) + E(X)}^{E(X^2)} - E(X)^2$

$$= \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2$$

$$= \lambda$$

3 Covariance

On s'intéresse toujours aux seules v.a. réelles.

3.1 Définition

Définition. Soit $X, Y \in L^2$. On appelle **covariance de** X **et** Y le réel :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))\right)\\ &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)\end{aligned}$$

Proposition. Si X et Y sont indépendantes, leur covariance est nulle.

Remarque. *La réciproque est fausse. Si la covariance est nulle, X et Y peuvent ne pas être indépendantes. Elles sont simplement* ***non corrélées****.*

Rmq : $\mathrm{Cov}(X,X) = V(X)$

Rmq : Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

la réciproque est fausse.

Si $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$, on dit X, Y non corrélées

Preuve : $\mathrm{Cov}(X,Y) = E\left((X-m_X)(Y-m_Y)\right)$

$= E\left(XY - m_X Y - m_Y X + m_X m_Y\right)$

$m_X = E(X)$

$m_Y = E(Y)$

$= E(XY) - m_X E(Y) - m_Y E(X) + m_X m_Y$

$= E(XY) - E(X)E(Y)$

Rmq : $\mathrm{Cov}(X,Y) = \underbrace{E(XY)}_{} - E(X)E(Y)$

se calcule par transfert

$$\sum_{\substack{x \in X(\Omega)\\ y \in Y(\Omega)}} xy\, P(X=x, Y=y)$$

3.2 Règles de calcul

Proposition.

- $(X,Y) \mapsto \mathrm{Cov}(X,Y)$ est une application bilinéaire, symétrique, positive.
- $\mathrm{V}(X) = \mathrm{Cov}(X,X)$.
- $\mathrm{Cov}(X+a, Y+b) = \mathrm{Cov}(X,Y)$
- $\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$
- Plus généralement :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_n) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(X_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)\end{aligned}$$

- bilinéarité : $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

est bilinéaire par bilinéarité du produit et linéarité de l'espérance.

$\mathrm{Cov}(aX + a'X', Y) = \dots$

symétrique par commutativité du produit

positive : ⚠ ça ne veut pas dire $\mathrm{Cov}(X,Y) \geq 0$!!

$\mathrm{Cov}(X,X) = V(X)$

$\geq 0 \quad \forall X$

- $V(X+Y) = \mathrm{Cov}(X+Y, X+Y)$

$= \mathrm{Cov}(X,X) + \mathrm{Cov}(Y,X) + \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,Y)$

$= V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$

Remarque : on a donc :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{2}\left(V(X+Y) - V(X) - V(Y)\right)$$

$V(X_1 + \dots + X_n)$

$$= \mathrm{Cov}(X_1 + \dots + X_n, X_1 + \dots + X_n)$$

$$= \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \quad \text{par bilinéarité.}$$

$$= \sum_{\substack{i,j \\ i=j}} \underbrace{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}_{V(X_i)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Ben oui !

$$(a_1 + \dots + a_n)^2$$

$$(a_1 + a_2 + a_3)^2$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ (i=j)}}^{n} a_k^2 + \sum_{i \neq j} a_i a_j$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{i<j} a_i a_j$$