Pour dimanche soir : au moins un ex à rédiger

parmi 83.24, 83.25, 84.26

1.5 Propriétés de l'espérance

Formule de transfert.

Soit X une variable aléatoire discrète et f une fonction définie sur $X(\Omega)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
La variable aléatoire $f(X)$ a un espérance finie si et seulement si $\big(f(x)P(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable.
On a dans ce cas :

$$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,P(X=x)$$

Remarque. *On peut appliquer ce théorème dans le cas d'une v.a. vectorielle. Par exemple, si X et Y sont deux v.a. réelles, le calcul de $\mathrm{E}(XY)$ relève de la formule de transfert.*

$Z=(X,Y)$ va de loi la loi conjointe de (X,Y)

$f : (u,v) \longmapsto u\times v$

$$E(XY) = E(f(Z)) = \sum_{z\in Z(\Omega)} f(z)\, P(Z=z)$$

$$= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} x\cdot y \; P(X=x, Y=y)$$

Exemple. Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $-1, 0, 1$ avec les probabilités respectives $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$ et $\frac{6}{9}$. Vérifier que $\mathrm{E}(X^2) = \frac{7}{9}$.

Espérance finie par comparaison. Si X et Y sont deux v.a. telles que $|X| \leqslant Y$ et Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie et :

$$|\operatorname{E}(X)| \leqslant \operatorname{E}(Y)$$

$|X| \leq Y$ signifie $\forall \omega \in \Omega \quad |X(\omega)| \leq Y(\omega)$

$$E(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y \, P(Y=y)$$

$$E(|X|) = \sum_{x \in X(\Omega)} |x| \, P(X=x)$$

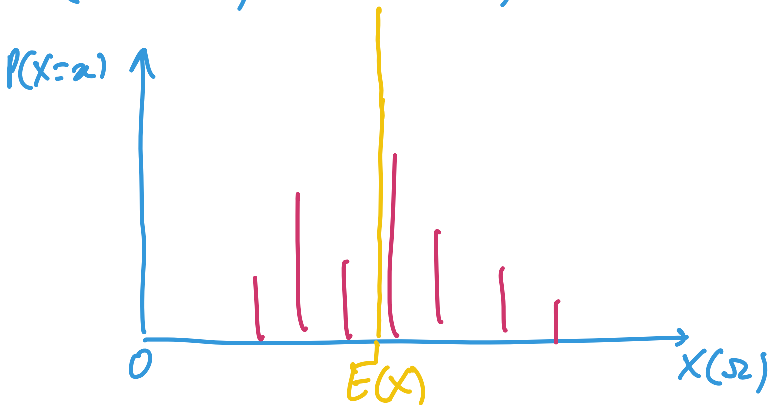
voir poly.

Linéarité de l'espérance. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles ou complexes d'espérances finies. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda X + \mu Y$ est d'espérance finie et :

$$\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\,\mathrm{E}(X) + \mu\,\mathrm{E}(Y)$$

Remarque. *Cela signifie que l'ensemble des v.a. d'espérance finie est un espace vectoriel, et que l'espérance est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.*

$$E(aX+b) = a\,E(X) + b$$



Justif :

$$E(\lambda X + \mu Y) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} (\lambda x + \mu y)\, P(X=x, Y=y)$$

par transfert

sous réserve de sommabilité

$$= \underbrace{\lambda \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} x\, P(X=x, Y=y)} + \mu \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} y\, P(X=x, Y=y)$$

Par le th. de Fubini

$$\sum_{x,y} x\, P(X=x, Y=y) = \sum_{x\in X(\Omega)} \left(\sum_{y\in Y(\Omega)} x\, P(X=x, Y=y) \right)$$

$$= \sum_{x\in X(\Omega)} x \left(\sum_{y\in Y(\Omega)} P(X=x, Y=y) \right)$$

$P((X=x)\cap(Y=y))$

$$= \sum_{x\in X(\Omega)} x\, P(X=x) \qquad \text{(loi marginale)}$$

$= E(X)$

Finalement $E(\lambda X+\mu Y) = \lambda E(X)+\mu E(Y)$

Exemple. On (re-)lance deux dés, et on note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros qui apparaissent sur les deux dés. Montrer que X est d'espérance finie et calculer $\mathrm{E}(X)$.

On note D_1, D_2 la va du résultat du dé 1, du dé 2.

On a $X = D_1 + D_2$.

donc $E(X) = E(D_1) + E(D_2)$ par linéarité

$= 2E(D_1)$ car $D_1 \sim D_2$

$D_1 \sim \mathcal{U}(\llbracket 1,6 \rrbracket)$ donc $E(D_1) = \frac{7}{2}$

donc $E(X) = 7$.

Positivité de l'espérance.

Si X est positive (i.e. à valeurs dans $\mathbb{R}_+$) alors $\mathrm{E}(X) \geqslant 0$.

Croissance de l'espérance.

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes d'espérances finies telles que $X \leqslant Y$ alors $\mathrm{E}(X) \leqslant \mathrm{E}(Y)$.

Remarque.

- *L'hypothèse $X \leqslant Y$ signifie que, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$.*
- *Le résultat reste vrai si $X \leqslant Y$ presque sûrement.*

$P(X \leq Y) = 1$

$Y - X \geq 0$

donc $E(Y - X) \geq 0$

$E(Y-X) = E(Y) - E(X)$.

Inégalité triangulaire. Si X est d'espérance finie, alors :

$$|\mathrm{E}(X)| \leqslant \mathrm{E}(|X|)$$

1.6 D'autres propriétés de l'espérance

Proposition. Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X = 0)$ est presque-sûr.

Preuve : On suppose $X \geq 0$ et $E(X) = 0$

ie $\sum_{x \in X(\Omega)} x\, P(X = x) = 0$

$x \geq 0 \quad \forall x \in X(\Omega)$

donc $0\, P(X=0) + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \neq 0}} x\, P(X = x) = 0$

Somme nulle de termes positifs

donc $\forall x \in X(\Omega),\ x \neq 0,\quad x\, P(X = x) = 0$

donc $P(X = x) = 0$

Ainsi $P(X \neq 0) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \neq 0}} P(X = x)$

$= 0$

donc $P(X = 0) = 1$

Proposition. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes, d'espérances finies. Alors XY est d'espérance finie et :

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

Remarque. *Ce résultat peut être généralisé au cas de n variables indépendantes et d'espérances finies.*

- Mq XY est d'espérance finie :

Calculons, dans $[0,+\infty[\cup\{+\infty\}$:

$$E(|XY|) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} |xy|\; P(X=x, Y=y)$$

par transfert

$$= \sum_{x,y} |xy|\; P(X=x)\,P(Y=y)$$

par indépendance

$$= \sum_{x\in X(\Omega)} \left(\sum_{y\in Y(\Omega)} |x|\,P(X=x)\; |y|\,P(Y=y) \right)$$

par Fubini positif.

$$= \left(\sum_{x\in X(\Omega)} |x|\; P(X=x) \right) \left(\sum_{y\in Y(\Omega)} |y|\,P(Y=y) \right)$$

$$= E(|X|)\; E(|Y|)$$

$$< +\infty \quad \text{car } X, Y \text{ d'esp. finies}$$

donc XY est d'esp. finie.

- On calcule alors :

$$E(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\; P(X=x, Y=y)$$

par transfert.

$$= \sum_{x,y} xy \, P(X=x) \, P(Y=y)$$

par indépendance

$$= \left(\sum_{x \in X(\Omega)} x \, P(X=x) \right) \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} y \, P(Y=y) \right)$$

par Fubini sur une famille sommable

$$= E(X) \, E(Y)$$