Espérance et variance

Sauf mention contraire, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un espace probabilisé.

1 Espérance

On s'intéresse dans cette section aux v.a. réelles ou complexes.

1.1 Variables aléatoires réelles positives

Définition. Soit X un v.a. discrète, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. L'**espérance de** X est :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

Remarque.

- *Il s'agit de la somme d'une famille au plus dénombrable de réels positifs, cette somme est dans* $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.
- *On peut proposer la même définition lorsque* X *est à valeurs dans* $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.
- *Contrairement à la définition vue en première année, on somme une famille indexée par* $X(\Omega)$ *au plus dénombrable, et non par* Ω *qui peut être très gros. Cela revient à « regrouper » les épreuves selon leur valeur par* X.

Si Ω est fini, $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(\sum_{\omega \in (X=x)} \overset{x}{\cancel{X(\omega)}} P(\{\omega\}) \right)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} x \, P(X=x)$$

X = rang du premier succès ... $= +\infty$ si que des échecs

Remarque Si X à valeurs dans $[0,+\infty]$, dans la formule de l'espérance, on convient que $(+\infty)\times P(X=+\infty)$ vaut 0 si $P(X=+\infty)=0$

Exemple. On lance deux dés, et on note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros qui apparaissent sur les deux dés. Calculer $\mathrm{E}(X)$.

Donner la loi de X puis $E(X)$:

- $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ On note D_1, D_2 la va des dés
- $P(X=2) = P(D_1=1, D_2=1)$

$$= P(D_1=1)\, P(D_2=1) \quad \text{par indép}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(X=3) = P(D_1+D_2=3)$$

$$= P(D_1=1, D_2=2) + P(D_1=2, D_2=1)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{36}$$

$$P(X=k) = \dots$$

- $E(X) = \sum_{k=2}^{12} k\, P(X=k)$

$$= 2\times\frac{1}{36} + 3\times\frac{2}{36} + 4\times\frac{3}{36} \dots + 12\times\frac{1}{36}$$

Exemple. On considère X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, définie par sa loi en posant :

$$\forall n \geqslant 1,\ P(X=n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

Justifier que l'on définit ainsi une loi de probabilités. (ie : $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n\geq 1}$ distrib de proba)
Calculer $\mathrm{E}(X)$.

- $\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n(n+1)} \geq 0$

- $$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

$$\cancel{= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}}$$

par les sommes partielles :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n}$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1}$$

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$$

donc $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

- $$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot P(X=n)$$ dans $[0,+\infty]$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

$$= +\infty$$

1.2 Une formule pour les v.a. à valeurs entières

Proposition. Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$$

Remarque. *On peut généraliser cette formule au cas des v.a. à valeurs dans* $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Preuve:

$$(X \geq n) = \overbrace{\bigcup_{k \geq n}}^{\text{disjoints}} (X = k)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} P(X = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{k} P(X=k)$$

(Fubini positif)

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k\, P(X=k)$$

$$= E(X)$$

Exemple: $E(X)$ où $X \sim \mathcal{G}(p)$?

M1: $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, P(X=n)$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n\,(1-p)^{n-1} p$$

On connaît $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$= p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2}$$

$$= \frac{1}{p}$$

M2 : X à valeurs dans ~~$\mathbb{N}$~~ $\mathbb{N}^*$

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^n$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{1-(1-p)}$$

$$= \frac{1}{p}$$

"X admet une espérance" signifie $(x P(X=x))_x$ sommable

1.3 Variables aléatoires réelles de signe quelconque, ou complexes

Définition. Soit X une v.a. discrète, à valeurs réelles ou complexes. Lorsque la famille $(xP(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, on dit que X **est d'espérance finie**, et on définit :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)$$

Dans le cas contraire, X n'a pas d'espérance.

Remarque.

- *X est donc d'espérance finie lorsque* $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} |x|P(X=x) < +\infty$.
- *L'espérance est un indicateur de position de la v.a.*

Notation. On note L^1 l'ensemble des v.a. d'espérance finie.

Exemple. Quelle est l'espérance d'une variable aléatoire discrète constante, égale à a ?

Remarque. *Le résultat reste valable si la v.a. n'est que presque sûrement constante.*

$X(\Omega) = \{a\} \qquad P(X=a) = 1$

$$E(X) = \sum_{x=a} a\, P(X=a)$$
$$= a$$

Si $\boxed{X = a \text{ p.s.}}$ $\qquad (X=a)$ est presque sûr.

$X(\Omega) = \{a\} \cup E$

$$E(X) = \sum_{x \in \{a\} \cup E} x\, P(X=x)$$
$$= a\, P(X=a) + \sum_{x \in E} x\, P(X=x)$$

or $\forall x \in E, \quad (X=x) \subset \overline{(X=a)}$

donc $P(X=x) = 0$

il reste $E(X) = a\, P(X=a) = a$.

Proposition. Deux variables aléatoires discrètes X et Y admettant la même loi et ayant une espérance finie ont la même espérance.

$X \sim Y$

Définition. Une v.a. est dite **centrée** lorsqu'elle est d'espérance nulle : $\mathrm{E}(X) = 0$.

Si X n'est pas centrée, $Y = X - \underbrace{E(X)}_{\text{notée } m}$ est centrée

1.4 Espérance des lois usuelles

Proposition.

- Si $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors $\mathrm{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$.
- Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors $\mathrm{E}(X) = p$.
- Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, alors $\mathrm{E}(X) = np$.
- Si $X \sim \mathscr{G}(p)$, alors $\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{p}$.
- Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, alors $\mathrm{E}(X) = \lambda$.

- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$: (à valeurs positives)

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\, P(X=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$\frac{n}{n!} \neq \frac{1}{(n-1)!} \text{ si } n=0$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{(n-1)!}$$

$$= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= \lambda$$

- $X \sim \mathcal{B}(p)$

$$E(X) = 0\, P(X=0) + 1\, P(X=1)$$

$$= p$$

- $X \sim \mathcal{B}(n,p)$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\, P(X=k)$$

$$= \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!}\, p^{k} (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-k)!\,k!}\, p^{k+1} (1-p)^{n-1-k}$$

$$= n \cdot p \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k} (1-p)^{n-1-k}$$

$$= n \cdot p \cdot (p+1-p)^{n-1}$$

$$= np$$

<u>M2</u> : On considère $X_1 \dots X_n$ des va de Bernoulli indép, de paramètre p.

On a $X \sim X_1 + \dots + X_n$

donc $E(X) = E(X_1 + \dots + X_n)$

$= E(X_1) + \dots + E(X_n)$ par linéarité

$= p + \dots + p$

$= np.$

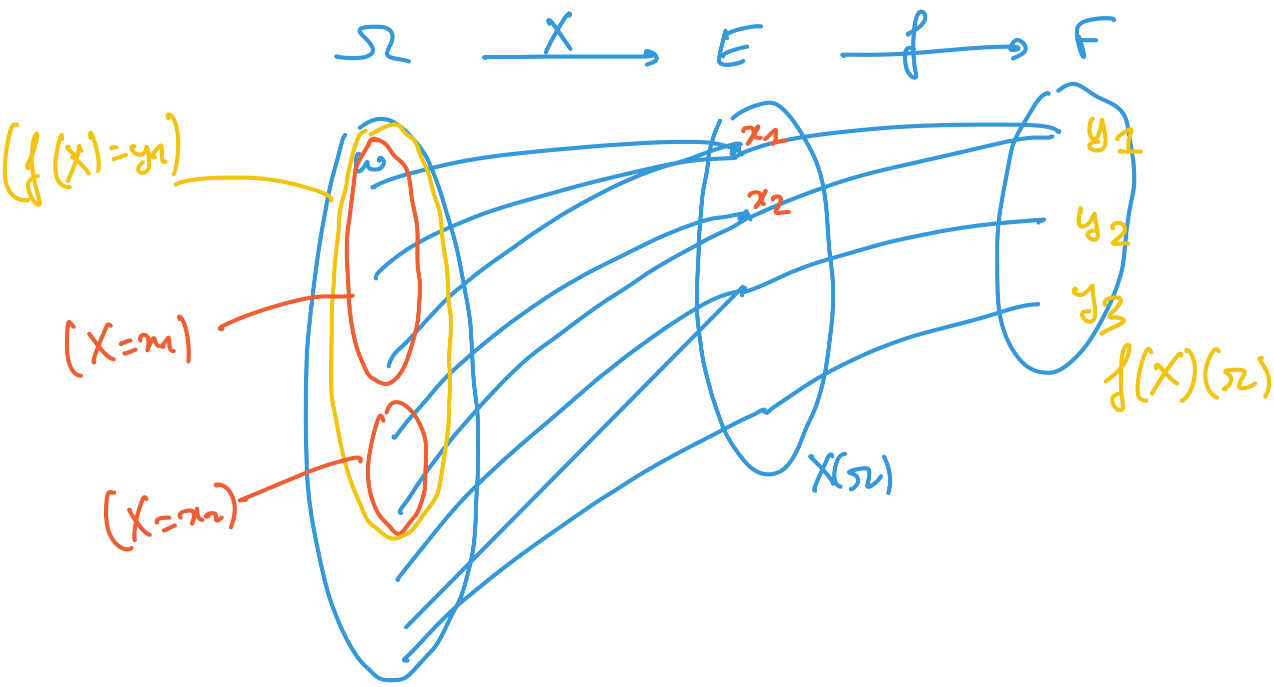
Exemple. Si A est un événement, montrer que $\mathbb{1}_A$ est d'espérance finie, et donner $\mathrm{E}(\mathbb{1}_A)$.

1.5 Propriétés de l'espérance

Formule de transfert.

Soit X une variable aléatoire discrète et f une fonction définie sur $X(\Omega)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
La variable aléatoire $f(X)$ a un espérance finie si et seulement si $\big(f(x)P(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable.
On a dans ce cas :

$$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,P(X=x)$$



$$E(f(X)) = \sum_{y\in f(X)(\Omega)} y\,P(f(X)=y)$$

$$= y_1 P(f(X)=y_1) + y_2 P(f(X)=y_2)$$
$$+ y_3 P(f(X)=y_3)$$

$$(f(X)=y_1) = (X=x_1) \underset{disj}{\cup} (X=x_2)$$

$$= \underset{x\in f^{-1}(\{y_1\})}{\bigcup^{disj}} (X=x)$$

$\boxed{\text{Ph. 1}}$

(a) $(p_n)_n$ est une distrib de proba si

$$\begin{cases} p_n \geqslant 0 \quad \forall n \\ \sum p_n = 1 \end{cases}$$

- $p_n \geqslant 0 \iff \alpha \geqslant 0$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$= \alpha (-) \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \alpha \ln 2 .$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1 \iff \alpha = \frac{1}{\ln 2}$$

(b) $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ donc on calcule dans $[0, +\infty]$:

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, P(X=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{2^n}$$

$$= \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \alpha < +\infty$$

donc X est d'esp finie $\alpha = \frac{1}{\ln 2}$.

(c) $E(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln(2) n - 1\right) P(X=n)$

par transfert

où $f : t \mapsto \ln(2).t - 1$

$$Y = f(X)$$

$$= \ln 2 \; E(X) - \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)}_{=1}$$

$$= 0$$

donc Y est centrée.

$\boxed{84.16}$

$\frac{1}{X+1}$ est à valeurs positives.

On calcule, dans $[0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X=n) \quad \text{par transfert}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n+1)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(e^{\lambda} - 1\right)$$

$$= \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$$