Pour ve: 83.1, 83.3, 83.4

PPMS

1.3 Fonction d'une variable aléatoire discrète

Proposition. Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète, et $f : E \to F$ une application quelconque. Alors la composée $f \circ X$, notée $f(X)$, est une variable aléatoire discrète.

Proposition. Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

Remarque. *Si X et Y sont des v.a., alors $Z = (X, Y)$ est une v.a. (un couple de v.a. est une v.a. à valeur dans un produit). Donc pour toute fonction f, $f(Z)$ est une v.a.*
Ainsi $X + Y$, XY, $\mathrm{Min}(X, Y)$, $\mathrm{Max}(X, Y)$ sont des v.a.

$$: \begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{X} & E & \xrightarrow{f} & F \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) & \longmapsto & f(X(\omega)) \end{array}$$

X va suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

$\cancel{\sin(X)}$ $\qquad (\sin \circ X)(\omega) = \sin(X(\omega))$

$\sin(X)$ $\qquad (f(X) = y)$ événement.

Exemple. Si X est va, $2X$ est une va

$X+3$ est une va

Si X, Y sont 2 va

$Z = (X, Y)$ est une va

et $f : (x,y) \longmapsto x+y$

donc $X+Y$ est une va.

$\mathrm{Min}(X, Y)$ est une va.

2 Lois usuelles

Conseil. *Il n'est pas inutile de ficher les lois usuelles.*

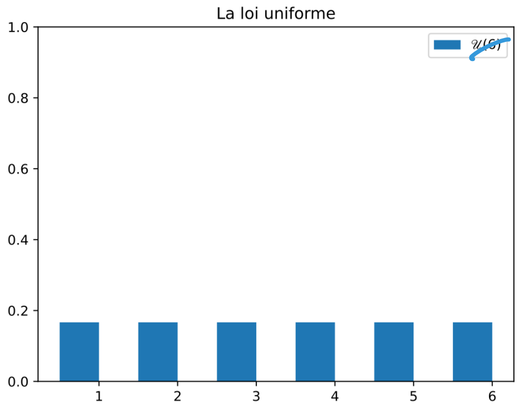
2.1 Loi uniforme

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[\![1,n]\!]$ lorsque :

$$X(\Omega) = [\![1,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1,n]\!],\ P(X=k) = \frac{1}{n}$$

On note alors $X \sim \mathscr{U}([\![1,n]\!])$.

Interprétation. *C'est la loi du choix « au hasard » d'un élément dans un ensemble à n éléments.*



$\mathcal{U}([\![1,6]\!])$

distrib de proba $\quad \left(P(X=x)\right)_{x \in X(\Omega)}$

$$\left(P(X=k)\right)_{k \in [\![1,n]\!]} = \left(\frac{1}{n}\right)_{1 \leq k \leq n}$$

2.2 Loi de Bernoulli

Définition. Soit $p \in]0,1[$. Une variable aléatoire X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p lorsque :

$$X(\Omega) = \{0,1\} \quad \text{et} \quad P(X=1) = p,\ P(X=0) = 1-p$$

On note alors $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Exemple. Toute expérience à deux issues, comme le jeu de Pile ou Face, est naturellement modélisée par une v.a. suivant une loi de Bernoulli.

Exemple. Si A est un événement, sa fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$:

$$\mathbb{1}_A \sim \mathscr{B}(P(A))$$

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \notin A \\ 1 & \text{si } \omega \in A \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(\mathbb{1}_A = 1) = P(A) \\ P(\mathbb{1}_A = 0) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) \end{cases}$$

"succès" "échec".

2.3 Loi binomiale

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Une variable aléatoire X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p lorsque :

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note alors $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

Interprétation. *C'est la loi du nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes, de même paramètre p.*

Proposition. Si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre p, alors :

$$X_1 + \cdots + X_n \sim \mathscr{B}(n, p)$$

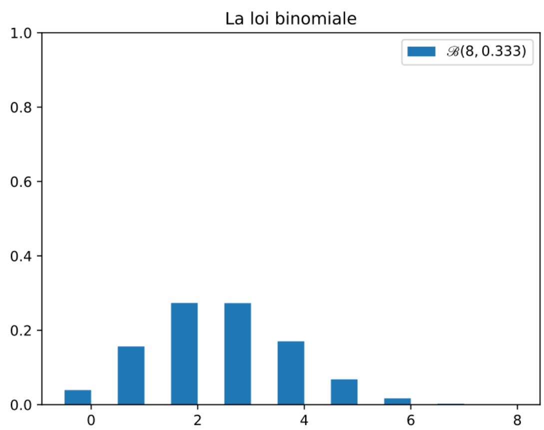
S_i = « succès à l'épreuve i »

E_i = « échec à l'épreuve i »

$$(X=k) = \bigcup S_1 E_2 E_3 S_4 \dots$$

$= \bigcup$ k succès et $n-k$ échecs

où $\binom{n}{k}$ façon de placer les k succès



Preuve: Répétition de n épreuves de Bernoulli

On note X_i la v.a. de Bernoulli associée à la i^e épreuve.

$X_i(\omega) = 0$ si échec à la i^e épreuve

$= 1$ si succès.

Compter le nb de succès, c'est $(X_1 + \dots + X_n)(\omega)$

Mq que $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$ par récurrence sur n.

- $n = 1$:

$$X_1 \sim \mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(1, p)$$

- On suppose $\underbrace{X_1 + \dots + X_n}_{\text{notée } Y_n} \sim \mathcal{B}(n, p)$

Mq que $\underbrace{(X_1 + \dots + X_n + X_{n+1})}_{\text{notée } Y_{n+1}} \sim \mathcal{B}(n+1, p)$:

$*$ $Y_{n+1}(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$

car $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$ $\forall i$

$*$ Soit $k \in [\![0, n+1]\!]$

1er cas

si $k \neq 0$
$k \neq n+1$

$$P(Y_{n+1} = k) = P(Y_n + X_{n+1} = k)$$

On conditionne par X_{n+1}

$((X_{n+1} = 0), (X_{n+1} = 1))$ système complet

par les probas totales

$$= P(Y_n + X_{n+1} = k \mid X_{n+1} = 0)\, P(X_{n+1} = 0)$$

$$+ P(Y_n + X_{n+1} = k \mid X_{n+1} = 1)\, P(X_{n+1} = 1)$$

$$= P(Y_n = k \mid X_{n+1} = 0)\, P(X_{n+1} = 0)$$

$$+ P(Y_n = k-1 \mid X_{n+1} = 1)\, P(X_{n+1} = 1)$$

par le lemme des coalitions, Y_n et X_{n+1}

sont indépendantes

$$\Big(\underbrace{\boxed{X_1 \dots X_n}}_{Y_n}, \underbrace{\boxed{X_{n+1}}}_{X_{n+1}}\Big) \text{ indep}$$

$$= P(Y_n = k)\, P(X_{n+1} = 0)$$

$$+ P(Y_n = k-1)\, P(X_{n+1} = 1)$$

par HR $= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \times (1-p)$

$+ \binom{n}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1} \times p$

$\forall k \in [\![0, n]\!]$

$P(Y_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$= \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] p^k (1-p)^{n-k+1}$$

$$= \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n-k+1}$$

2e cas : $k = 0$ $\quad P(Y_{n+1} = 0) = [\dots)$

$k = n+1$ $\quad P(Y_{n+1} = n+1) = [\dots)$

2.4 Loi géométrique

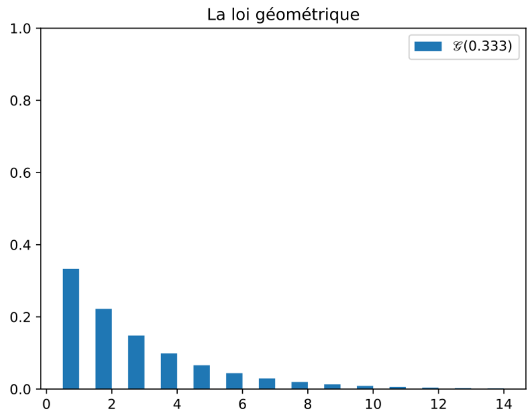
Définition. Soit $p \in]0,1[$. Une variable aléatoire X suit une **loi géométrique** de paramètre p lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = (1-p)^{k-1}p$$

On note alors $X \sim \mathscr{G}(p)$.

Interprétation. *C'est la loi du numéro du premier succès dans la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même paramètre p.*

rang



2.5 Loi de Poisson

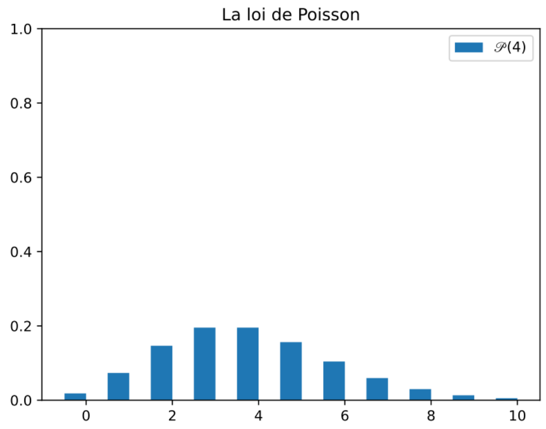
Définition. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Une variable aléatoire X suit une **loi de Poisson** de paramètre λ lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$P(X=k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$

On note alors $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

Interprétation. *On l'appelle la loi « des événements rares » : lorsqu'un événement rare arrive en moyenne λ fois sur une période T, c'est la loi du nombre de fois où cet événement se produit sur une période donnée.*



Mque $(P(X=k))_{k\in\mathbb{N}}$ est une distrib. de proba :

* $\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X=k) \geq 0$

* Dans $[0,+\infty]$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} P(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda}$$

$$= 1 \quad < +\infty$$

3 Couples de variables aléatoires

3.1 Loi conjointe, lois marginales

Remarque. *On a vu que si X et Y sont deux v.a. discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, alors $Z = (X, Y)$ est aussi une v.a. discrète. On s'intéresse aux liens entre les lois de X et Y d'une part, et de Z d'autre part. On a directement $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$. En pratique, on ne cherche pas à préciser $Z(\Omega)$.*

Définition. Si X et Y sont deux v.a. à valeurs dans $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement, leur **loi conjointe** est la loi du couple (X, Y) :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P((X, Y) = (x, y)) = P((X = x) \cap (Y = y))$$

que l'on note plus simplement $P(X = x, Y = y)$.
Les **lois marginales** du couple (X, Y) sont celles de X et de Y.

$X : \Omega \longrightarrow \cancel{E}\ X(\Omega)$

$Y : \Omega \longrightarrow \cancel{F}\ Y(\Omega)$

$Z = (X, Y) : \Omega \longrightarrow \cancel{E \times F}$ $\cancel{X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ $\cancel{Z(\Omega)}$ $X(\Omega) \times Y(\Omega)$

$Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$

Donner la loi conjointe, c'est donner $X(\Omega) \times Y(\Omega)$
et la distrib. de proba $\big(P(X = x, Y = y)\big)_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$

Exemple.

- Un prof pose une question à deux étudiants, Antoine et Baptiste, qui n'ont pas appris leur cours. Leur réponse respective est une variable aléatoire notée A (resp. B), qui suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
- Dans le même contexte, Antoine a une confiance aveugle en Baptiste, et copie sa réponse (même si il répond toujours au hasard). A et B suivent encore $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. $A(\omega) = B(\omega)$
- Dans le même contexte, Baptiste se méfie d'Antoine, et copie sur sa copie pour répondre l'opposé (tandis que lui répond toujours au hasard). A et B suivent encore $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. $A = 1 - B$

Dans les trois situations précédentes, le couple (A, B) ne suit pas du tout la même loi :

$A \backslash B$	0	1	P_A
0	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
P_B	1/2	1/2	1

$A \backslash B$	0	1	P_A
0	1/2	0	1/2
1	0	1/2	1/2
P_B	1/2	1/2	1

$A \backslash B$	0	1	P_A
0	0	1/2	1/2
1	1/2	0	1/2
P_B	1/2	1/2	1

Remarque. *Il apparaît bien que connaître les lois marginales n'est pas suffisant pour connaître la loi conjointe.*

$X \sim$

$Y \sim$

$(X, Y) \sim\ ?$

3.2 Détermination pratique des lois marginales

Remarque. *On peut visualiser loi conjointe et lois marginales dans un tableau (fini ou dénombrable), avec* $X(\Omega) = \{x_i,\, i \in I\}$ *et* $Y(\Omega) = \{y_j,\, j \in J\}$ *et en notant* $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ *:*

Y \ X	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	Loi de X
x_1	p_{11}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$P(X = x_1) = \sum_{j\in J} p_{1j}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$P(X = x_i) = \sum_{j\in J} p_{ij}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
Loi de Y	$P(Y = y_1) = \sum_{i\in I} p_{i1}$	$\cdots$	$P(Y = y_j) = \sum_{i\in I} p_{ij}$	$\cdots$	1

Proposition. On obtient les lois marginales par σ-additivité, ou applications des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Y = y)_{y\in Y(\Omega)}$:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \sum_{y\in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{y\in Y(\Omega)} P(X = x | Y = y) P(Y = y) \end{aligned}$$

loi de X à partir de la loi du couple

et de même pour $P(Y = y)$.

3.3 Extension aux n-uplets de variables aléatoires

Définition. Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a. discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $E_1, \dots, E_n$. Alors l'application :

$$X : \omega \mapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E_1 \times \cdots \times E_n$.
En général, les E_i sont (des parties de) $\mathbb{R}$ et X est appelé un **vecteur aléatoire** discret.

Loi conjointe. Avec les notations précédentes, la loi conjointe est la loi de X : elle est entièrement déterminée par la donnée de $X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$ et, pour $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, la valeur de $P(X = (x_1, \dots, x_n)) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$.

Proposition. Pour A partie de $E_1 \times \cdots \times E_n$,

$$P(X \in A) = \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in A \cap (X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega))} P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

Lois marginales. La loi de X_1, dite **loi marginale**, se déduit de la loi conjointe par *sigma*-additivité :

$$\forall x \in X_1(\Omega),\ P(X_1 = x) = \sum_{(x_2, \dots, x_n) \in X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)} P(X_1 = x, X_2 = x_2 \dots, X_n = x_n)$$

et de même pour X_2, ..., X_n.

4 Indépendance de deux variables aléatoires

4.1 Lois conditionnelles

Proposition. Soit X et Y deux v.a. discrètes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans E et F respectivement. Pour $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y) > 0$, on définit la **loi sachant** $(Y = y)$ **de** X par la distribution de probabilités discrètes :

$$\big(P(X = x \mid Y = y)\big)_{x \in X(\Omega)}$$

c'est-à-dire que $P_{X|(Y=y)}(X = x) = \dfrac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$.

Remarque. *On présente en annexe, page 9, un définition plus précise de la loi conditionnelle.*

4.2 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes. On dit que X et Y sont **indépendantes** et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$ si et seulement si, pour tout $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants, c'est-à-dire :

$$\forall x \in X(\Omega),\ y \in Y(\Omega),\ \ P(X = x, Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y)$$

Remarque. *De façon équivalente, cela signifie que la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par :*

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y)$$

Proposition. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
Alors pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, on a :

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$$

Remarque. *On peut montrer que l'indépendance de X et Y est équivalente à l'égalité, pour tout $x \in X(\Omega)$, de la loi conditionnelle sachant $(X = x)$ de Y et de celle de Y, i.e. $P_{Y|(X=x)} = P_Y$.*

Preuve :

$$P(X \in A, Y \in B) = \sum_{\substack{x \in A \cap X(\Omega) \\ y \in B \cap Y(\Omega)}} P(X = x, Y = y)$$

$$= \sum_{\substack{x \in A \cap X(\Omega) \\ y \in B \cap Y(\Omega)}} P(X = x)\, P(Y = y)$$ par indépendance

Fubini positif

$$= \sum_{x \in A \cap X(\Omega)} \left(\sum_{y \in B \cap Y(\Omega)} P(X = x)\, P(Y = y) \right)$$

$$= \sum_{x \in A \cap X(\Omega)} \left(P(X=x) \left(\sum_{y \in B \cap Y(\Omega)} P(Y=y) \right) \right)$$

$$= \left(\sum_{x \in A \cap X(\Omega)} P(X=x) \right) \left(\sum_{y \in B \cap Y(\Omega)} P(Y=y) \right)$$

$$= P(X \in A) \times P(Y \in B)$$

4.3 Indépendance d'une famille finie de variables aléatoires

Définition. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes. On dit qu'elles sont (mutuellement) **indépendantes** si et seulement si pour tout $x_1 \in X_1(\Omega), \ldots, x_n \in X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 = x_1), \ldots, (X_n = x_n)$ sont indépendants, c'est-à-dire :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

On peut généraliser la propriété vue pour le cas de deux variables aléatoires discrètes indépendantes :

Proposition. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes (mutuellement) indépendantes. Soit $A_1 \subset X_1(\Omega), \ldots, A_n \subset X_n(\Omega)$. On a :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i)$$

4.4 Indépendance d'une famille quelconque de variables aléatoires

Définition. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de v.a. discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On dit que $(X_i)_{i\in I}$ est **indépendante** si et seulement si toute sous-famille $(X_i)_{i\in J}$, où $J \subset I$ est fini, est indépendante.

Remarque. *On peut donc quantifier la définition suivante par :*

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall i_1, \ldots, i_n \in I$ *distincts*, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_{i_1}(\Omega) \times \cdots \times X_{i_n}(\Omega)$

$$P(X_{i_1} = x_1, \ldots, X_{i_n} = x_n) = P(X_{i_1} = x_1) \ldots P(X_{i_n} = x_n)$$

4.5 Opérations sur les familles de v.a. indépendantes

Théorème.

> Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
> Alors, pour toutes fonctions f et g, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

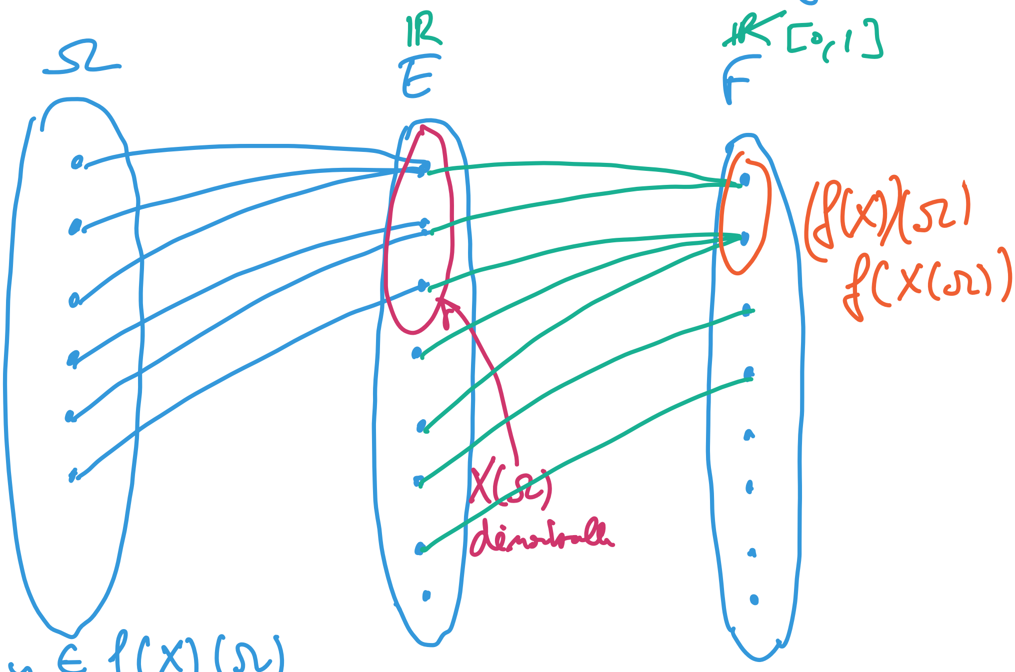
Preuve:

- $f(X)$ est une va:

$$X : \Omega \longrightarrow E, \quad \omega \longmapsto X(\omega)$$

sin $\mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathbb{R}$

$$f : E \longrightarrow F, \quad x \longmapsto f(x)$$



Pour $y \in f(X)(\Omega)$

$$(f(X)=y) \in \mathcal{A} \ ?$$

$$\omega \in (f(X)=y) \iff f(X(\omega)) = y$$

$$\iff X(\omega) \in f^{-1}(\{y\})$$

$$\iff \omega \in \left(X \in f^{-1}(\{y\})\right)$$

c'est un événement. car X va.

$$\iff \omega \in \left(X \in f^{-1}(\{y\}) \cap X(\Omega)\right)$$

Théorème.

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
Alors, pour toutes fonctions f et g, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Soit $x' \in f(X)(\Omega)$ et $y' \in g(Y)(\Omega)$

$$(f(X) = x') = (X \in f^{-1}(\{x'\}))$$

$$= \underbrace{\bigcup_{x \in f^{-1}(\{x'\}) \cap X(\Omega)}}_{\text{dénombrable}} (X = x)$$

de même $\displaystyle (g(Y) = y') = \bigcup_{y \in g^{-1}(\{y'\}) \cap Y(\Omega)} (Y = y)$

Donc $P(f(X) = x', g(Y) = y')$

$$= \sum_{\substack{x \in f^{-1}(\{x'\}) \cap X(\Omega) \\ y \in g^{-1}(\{y'\}) \cap Y(\Omega)}} P(X = x, Y = y)$$ par σ-additivité

$$= \sum P(X = x) P(Y = y)$$ par indép.

Fubini positif $$= \sum_{x \in f^{-1}(\{x'\}) \cap X(\Omega)} \sum_{y \in g^{-1}(\{y'\}) \cap Y(\Omega)} P(X = x) P(Y = y)$$

$$= \sum_{x \in f^{-1}(\{x'\}) \cap X(\Omega)} P(X = x) \times \sum_{y \in g^{-1}(\{y'\}) \cap Y(\Omega)} P(Y = y)$$

σ-additivité $= P\left(\bigcup_{\substack{x\in f^{-1}(\{x'\})\\ \cap X(\Omega)}} (X=x)\right) \times P\left(\bigcup_{\substack{y\in g^{-1}(\{y'\})\\ \cap Y(\Omega)}} (Y=y)\right)$

$$= P(f(X)=x')\ P(g(Y)=y')$$

Remarque. *Ce résultat s'étend au cas de plus deux variables aléatoires.*

Lemme des coalitions.

> Soit $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.d. indépendantes.
> Alors pour toutes fonctions f et g, $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

Remarque. *Ce résultat s'étend au cas de plus deux coalitions.*

Exemple :

$(X_1, \ldots, X_{2p})$ va indépendantes,

On note $\forall k \in [\![1, p]\!]$ $\quad Y_k = X_{2k-1} + X_{2k}$

Par le lemme des coalitions :

$(Y_1 \ldots Y_p)$ est indépendantes.

En effet :

$$(\underbrace{X_1, X_2}_{\substack{X_1+X_2\\ =Y_1}}, \underbrace{X_3, X_4}_{\substack{X_3+X_4\\ =Y_2}} \ldots\ldots \underbrace{X_{2p-1}, X_{2p}}_{\substack{X_{2p-1}+X_{2p}\\ =Y_p}})$$

Autre exemple :

$(X_1 \ldots X_n)$ va indép.

On note $Z_k = X_k + X_{k+1}$ $\quad \forall k \in [\![1, n-1]\!]$

$$(\underbrace{X_1, X_2}_{X_1+X_2 = Z_1}, \underbrace{X_3, X_4}_{X_3+X_4 = Z_3}, \dots, X_{n-1}, X_n)$$

$$\overbrace{X_2, X_3}^{X_2+X_3 = Z_2}$$

Le lemme des coalitions ne s'applique pas.

$\mathcal{G}(p)$ $\quad$ $X \sim \mathcal{G}(p)$

X, Y 2 va indép suivant $\mathcal{G}(p)$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

5 Existence

On admet le résultat suivant :

Théorème.

Soit $(\mathscr{L}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de lois de probabilités discrètes. Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et une famille $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de v.a. discrètes indépendantes sur cet espace tels que, pour tout i, $X_i \sim \mathscr{L}_i$.

Définition. On appelle **variables i.i.d.** des variables **indépendantes** et **identiquement distribuées**, c'est-à-dire qui suivent toutes la même loi.
On appelle **suite i.i.d.** une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de v.a. discrètes indépendantes, et qui suivent toutes la même loi.

Exemple. Le jeu de pile ou face infini se modélise par une suite i.i.d. de variables de Bernoulli.

83.35