5 Indépendance

5.1 Indépendance de deux événements

Définition. Deux événements A et B sont dits **indépendants** si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

Remarque. *Dans le cas où $P(B) > 0$, cela revient à dire $P(A \mid B) = P(A)$, c'est-à-dire que la réalisation de B n'influe pas sur la réalisation de A.*

Deux événements disjoints ne sont en général pas indépendants : la réalisation de l'un interdit la réalisation de l'autre.

Proposition. Si A et B sont indépendants, alors :

- A et $\overline{B}$ sont indépendants
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

$P(A) = P(A \cap (B \cup \overline{B}))$ car $B \cup \overline{B} = \Omega$

$= P((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}))$ union disjointe

$= P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ par σ-additivité

$= P(A)\,P(B) + P(A \cap \overline{B})$ par indép. de A et B.

donc $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A)P(B)$

$= P(A)\,(1 - P(B))$

$= P(A)\,P(\overline{B})$

et donc A et $\overline{B}$ sont indépendants.

5.2 Indépendance d'une famille ~~finie~~ d'événements

Définition. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements.

- Les événements sont **deux à deux indépendants** si et seulement si, pour tout $i, j \in \{1, \dots, m\}$:
$$i \neq j \implies P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\, P(A_j)$$
- Les événements sont **indépendants** si et seulement si, pour toute partie finie non vide $J \subset I$,
$$P\Big(\underbrace{\bigcap_{i \in J} A_i}_{\text{finie}}\Big) = \underbrace{\prod_{i \in J}}_{\text{fini}} P(A_i)$$

Remarque. *On utilise parfois l'expression « mutuellement indépendants » pour désigner l'indépendance.*
Des événements peuvent être deux à deux indépendants sans être indépendants.

Proposition. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements indépendants. Pour tout i, on définit $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$.
Alors $(B_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements indépendants.

$A_1, A_2, A_3, A_4 \dots$

$A_1, \overline{A_2}, \overline{A_3}, A_4 \dots$

Exemple. On lance deux dés discernables, et on considère les événements :

$$A = \text{« le premier dé donne un résultat pair »}$$
$$B = \text{« le second dé donne un résultat pair »}$$
$$C = \text{« la somme des résultats des deux dés est paire »}$$

Les événements A, B et C sont deux à deux indépendants mais ne sont pas (mutuellement) indépendants.

SCEI. X-ENS

Concours Mines-Ponts Mines-Télécom

Concours Centrale Supélec

CC. INP E3A-polytech

Attention : pas de souplesse (pas de délai par ex)

Date pièce d'identité

Frais d'inscription : anticiper le paiement à la mi-janvier.

Cas des boursiers

Quel centre d'écrit ?

Et les oraux ? Trajet, logement.

On parle de 5/2 ?

Pour ji : 83.2, 83.19

Variables aléatoires discrètes

Sauf mention contraire, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un espace probabilisé.

1 Qu'importe l'épreuve, pourvu qu'on ait le résultat !

1.1 Définition

$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, ...

Définition. Soit E un ensemble. Une **variable aléatoire discrète** X est une application :

$$X : \Omega \to X(\Omega) \subset E$$

$$\omega \mapsto X(\omega)$$

telle que :

- l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est au plus dénombrable ;
- pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $(X = x)$ est un événement. $\{X = x\}$

Remarque. *$(X = x)$ est l'ensemble $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}$, image réciproque (ou tiré en arrière) de $\{x\}$ par l'application. Dire que c'est un événement, c'est dire qu'il est dans la tribu $\mathscr{A}$.*

Remarque. *Travailler avec des variables aléatoires, c'est regrouper dans un même événement les épreuves en fonction de leur image par X.*

Exemple. Lors du lancer de deux dés, on appelle X le résultat de la somme des deux faces obtenues. C'est une variable aléatoire.

Exemple. On considère Ω l'ensemble des individus actuellement présents dans la salle. On peut considerer X la taille en cm, Y l'âge en années. Ce sont deux v.a. : $(X = 181)$, $(X \geqslant 190)$, $(Y = 19)$, $(Y = 15)$ sont des événements (et on peut se demander les épreuves qui les réalisent).

Exemple. On considère le jeu du pile ou face infini. Notant X le rang d'apparition du premier pile, X est un v.a. : $(X = 3)$, $(X > 5)$ sont des événemnets.

Remarque. *Les v.a. étudiées dans le cadre de notre programme sont toutes discrètes. Elles sont souvent à valeurs numériques, voire entières, mais on manipule aussi des v.a. à valeurs vectorielles quand on manipule des couples ou des n-uplets de v.a.*

$(X=3) = F_1 \cap F_2 \cap P_3$

Définition.

- Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on parle de **v.a. réelle discrète**.
- Lorsque $E = \mathbb{R}^2$, on parle de **couple de v.a. réelles**.

Remarque. *En pratique, on n'explicite pas Ω ni $\mathscr{A}$. Mais la donnée d'une v.a. fournit toute une série d'événements : les $(X = x)$. En combinant ces événements par unions et intersections au plus dénombrables, et en passant au contraire, on connaît beaucoup d'éléments de la tribu.*

Proposition.

- Si A est une partie de E, $(X \in A)$ désigne $\{\omega,\ X(\omega) \in A\} = \bigcup\limits_{x \in A \cap X(\Omega)} (X = x)$. C'est un événement comme union au plus dénombrable d'événements.
- Si X est une v.a. réelle, on définit les événements $(X \leqslant x)$, $(X > x)$ etc.

au plus dénombrable car $X(\Omega)$ au plus dénombrable.

$$X : \Omega \longrightarrow \cancel{E}\ X(\Omega)$$
$$\omega \longmapsto X(\omega)$$

Définition. Soit A un événement. On a déjà défini la **fonction indicatrice** de A par :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A : & \Omega & \to & \{0,1\} \\ & \omega & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} \end{array}$$

Proposition. La fonction indicatrice d'un événement est une variable aléatoire discrète.

- $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0,1\}$ fini
- $\omega \in (\mathbb{1}_A = 0) \iff \mathbb{1}_A(\omega) = 0$

$\iff \omega \notin A$

$\iff \omega \in \bar{A}$

donc $(\mathbb{1}_A = 0) = \bar{A}$ est un évènement

de même : $(\mathbb{1}_A = 1) = A$ est un évènement.

$$X : \Omega \longrightarrow E \cap X(\Omega)$$

univers dénombrable

$P(\quad)$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$X : \Omega \longrightarrow \cancel{E}\ X(\Omega)$ dénombrable

$\omega \longmapsto X(\omega)$

1.2 Loi

Définition théorique. Soit $X : \Omega \to E$ une v.a. discrète. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on définit :

$$P_X(A) = P(X \in A)$$

C'est une probabilité sur l'espace probabilisable $(E, \mathcal{P}(E))$ ou $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$

Remarque. *En fait, seuls les éléments de $E \cap X(\Omega)$ « comptent » ; cet ensemble est dénombrable, ce qui explique que l'on puisse choisir $\mathcal{P}(E)$ pour tribu.*

En pratique. La donnée de la loi d'un v.a. discrète X, c'est :

- la donnée de $X(\Omega)$, ensemble au plus dénombrable, parfois appelé abusivement « support » de X ;
- pour chaque $x \in X(\Omega)$, la valeur de $P(X = x)$.

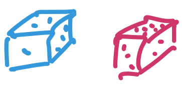
On dit qu'elle est déterminée par la distribution de probabilités discrètes $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

Remarque : on a : $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) = 1$

Proposition. Pour $A \subset E$ ou $A \subset X(\Omega)$, $P(X \in A) = \displaystyle\sum_{x \in A \cap X(\Omega)} P(X = x)$.

Notation. On note $X \sim Y$ lorsque les deux v.a. X et Y suivent la même loi.

Exemple :



$\mathcal{U}([\![1, 6]\!])$

X va donner la valeur du 1er dé

Y va d———— 2nd dé.

$X \sim Y \sim \mathcal{U}([\![1,6]\!])$

ω $X(\omega) = 6$ | $X(\omega_2) = 6$ | ...

$Y(\omega) = 3$ | $X(\omega_3) = 1$ | ...

⚠ $X = Y$

⚠ $(X = Y) = \{\omega \text{ tq } X(\omega) = Y(\omega)\}$

<u>Mque P_X est une probabilité :</u> sur $\left(X(\Omega)\cap E,\ \mathcal{P}(X(\Omega)\cap E)\right)$

- $\forall A,\quad P_X(A) = P(X\in A)$

$\in [0,1]$ car P est une proba.

- $(X\in A)$ est un événement, donc $P(X\in A)$ existe

- $P_X(E) = P(X\in E)$

$= 1$ car X est à valeurs dans E

- σ-additivité.

Soit $(A_n)_n$ suite dénombrable disjointe de parties de E.

$$P_X\left(\bigcup_n A_n\right) = P\left(X\in \bigcup_n A_n\right)$$

$$\omega\in\left(X\in\bigcup_n A_n\right) \Leftrightarrow X(\omega)\in\bigcup_n A_n$$

$$\Leftrightarrow \exists n \text{ tq } X(\omega)\in A_n$$

$$\Leftrightarrow \exists n \text{ tq } \omega\in(X\in A_n)$$

$$\Leftrightarrow \omega\in\bigcup_n (X\in A_n)$$

$$= P\left(\bigcup_n (X\in A_n)\right)$$

les A_n sont 2 à 2 disjoints donc

les événements $(X\in A_n)$ aussi

$$= \sum_n P(X\in A_n) \quad \text{par } \sigma\text{-additivité de } P$$

$$= \sum_n P_X(A_n)$$

$E \cap X(\Omega)$, $\mathcal{P}(E \cap X(\Omega))$

<u>Cool!</u> $(E, \mathcal{P}(E), P_X)$ est un espace probabilisé avec la tribu discrète donc on peut parler des événements élémentaires, les singletons.

La donnée de P_X est la donnée de

$$P_X(\{x\}) \quad \text{pour tout } x \in X(\Omega) \cap E$$

et ensuite

$$\underset{P(X \in A)}{P_X(A)} = P_X\Big(\bigcup_{x \in A} \{x\}\Big)$$

$$= \sum_{x \in A} P_X(\{x\}) \quad \text{par } \sigma\text{-addi}$$

$$= \sum_{x \in A} P(X = x)$$

La connaissance de $P(X \cdots)$ est donnée par la seule connaissance des $P(X = x)$

Exemple. On s'intéresse au jeu du pile ou face infini, et on note X la variable aléatoire donnant le rang du premier lancer qui donne pile. On suppose qu'à chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$, et celle d'obtenir face est $q = 1 - p$.

1. Déterminer la loi de X, appelée **loi géométrique de paramètre** p.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(X \leqslant n)$ et $P(X > n)$.

On note $P_k =$ « pile au lancer k »

$F_k =$ « face au lancer k » qui sont des évènements.

- Mque X est une va.

$*$ $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$

$*$ $\forall n \in X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$$(X = n) = F_1 \cap F_2 \dots \cap F_{n-1} \cap P_n$$
$$= F_1 F_2 \dots F_{n-1} P_n$$

est un évènement comme inters d'év.

$$(X = +\infty) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k \in \mathcal{A}.$$

- Loi de X :

$$P(X=n) = P(F_1 \dots F_{n-1} P_n)$$
$$= P(F_1) \dots P(F_{n-1}) P(P_n)$$

par indépendance.

$$= (1-p)^{n-1} p$$

" $(X=n) = (n-1)$ échecs suivis d'un succès "

$$P(X=\infty) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = 0$$

Exemple. Soit X un v.a. sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $[\![2, +\infty[\![$, et telle que :

$$\forall n \geqslant 2,\ P(X = n) = \zeta(n) - 1$$

Montrer que X suit une loi de probabilité.

ie Mque $\underline{(\zeta(n)-1)_{n\geq 2} \text{ est une distrib de probas}}$

- $\forall n \geq 2 \quad \zeta(n) - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^n} - 1$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n}$$

$$\geq 0$$

- $\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n}$

Fubini-positif, dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup \{+\infty\}$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{k}}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$= 1 < +\infty$$

donc l'égalité est vraie dans $[0, +\infty[$.

1.3 Fonction d'une variable aléatoire discrète

Proposition. Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète, et $f : E \to F$ une application quelconque. Alors la composée $f \circ X$, notée $f(X)$, est une variable aléatoire discrète.

Proposition. Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

Remarque. *Si X et Y sont des v.a., alors $Z = (X, Y)$ est une v.a. (un couple de v.a. est une v.a. à valeur dans un produit). Donc pour toute fonction f, $f(Z)$ est une v.a.*
Ainsi $X + Y$, XY, $\mathrm{Min}(X, Y)$, $\mathrm{Max}(X, Y)$ sont des v.a.