Pour lu : DS 4

Pour ma : 82.2, 82.3

3 Négligeabilité

Définition. On dit qu'un événement A est **négligeable** lorsque $P(A) = 0$.

Remarque. *L'événement impossible $\varnothing$ est négligeable, mais un événement négligeable n'est pas, en général, impossible.*

Exemple. Dans le jeu de pile ou face infini :

- Montrer que l'événement « n'obtenir que des piles » est négligeable.
- Que penser de l'événement « obtenir un nombre fini de face » ?

On note P_k = « pile au lancer k »

On s'intéresse à E = « n'obtenir que des pile »

$$= P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4 \dots$$

$$= \bigcap_{k=1}^{+\infty} P_k$$

Par continuité décroissante,

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} P_k\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P(E)$$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} P_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(P_k) \quad \text{par indépendance des } P_k$$

$$= p^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{car } p \in]0,1[$$

donc $P(E) = 0$ donc E est négligeable

(mais pas impossible)

• Notons F = « obtenir un nb fini de faces »

$$\omega \in F \iff \exists N \text{ tq } \forall n \geq N \quad \omega \in P_n$$

$$\iff \exists N \text{ tq } \quad \omega \in \bigcap_{n \geq N} P_n$$

$$\iff \omega \in \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} P_n$$

donc $F = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \Big(\overbrace{\bigcap_{n \geq N} P_n}^{A_N} \Big)$ donc F est un événement.

(car la tribu est stable par union et intersection dénombrable)

$(A_N)_N$ est une suite croissante

donc, par continuité croissante :

$$P\Big(\bigcap_{n \geq N} P_n\Big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} P_n\Big) = P(F)$$

$P\Big(\bigcap_{n \geq N} P_n\Big) = [\ldots]$ comme 1er point $= 0$

CCl : $P(F) = 0$

Proposition. Une réunion au plus dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements négligeables

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) \quad \text{dans } [0,+\infty]$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} 0$$

$$= 0$$

quasi-certain

Définition. On dit qu'un événement A est **presque sûr** lorsque $P(A) = 1$.

Remarque. *L'événement certain Ω est presque sûr, mais un événement presque sûr n'est pas, en général, certain.*

Proposition. A est presque sûr si et seulement si $\overline{A}$ est négligeable.

Proposition. Une intersection au plus dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.

Définition. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille au plus dénombrable d'événements. On dit que c'est un **système quasi-complet** d'événements lorsque les A_i sont deux à deux disjoints, et de réunion presque sûre :

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 1$$

4 Conditionnement, indépendance

4.1 Probabilité conditionnelle

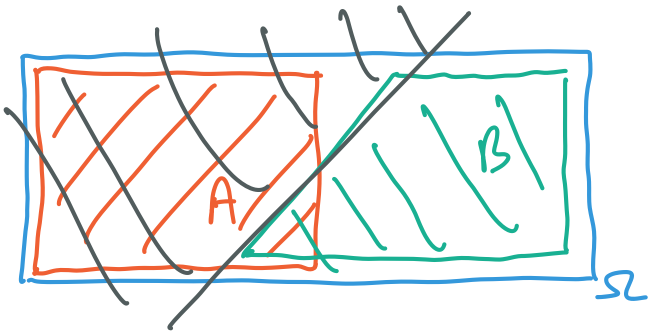
$P(B) \neq 0$

Définition. Soit B un événement non négligeable. Pour tout événement A, on appelle **probabilité de A sachant B** :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

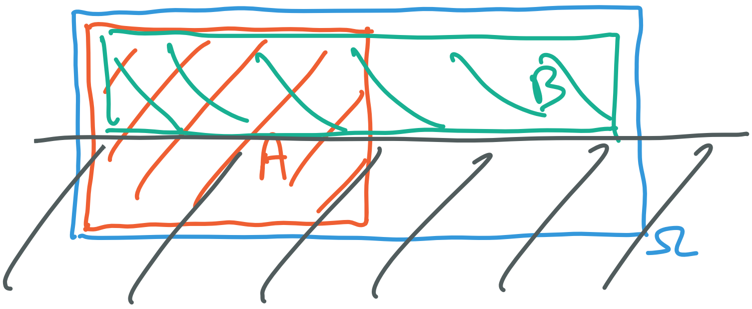
Remarque. *On utilise aussi la notation $P_B(A)$, **probabilité sachant B de A**.*

Proposition. P_B est une (autre) probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.



$P(A) = \frac{1}{2}$ $\quad P(B) = \frac{1}{2}$

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



"sachant B"

ω

Preuve: • P_B à valeurs dans $[0,1]$

car $P(A \cap B),\ P(B) \geq 0$

et $P(A \cap B) \leq P(B)$ car $A \cap B \subset B$

• $$P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

• σ-additivité:

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille dénombrable d'événements deux à deux disjoints

$$P_B\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\cap B\right)}{P(B)}$$

disjoints

$$= \frac{P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n\cap B)\right)}{P(B)}$$

par σ-additivité

$$= \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n\cap B)}{P(B)}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} P_B(A_n)$$

4.2 Probabilités composées

Probabilités composées.

Pour deux événements A et B tels que $P(B) > 0$, on a :

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)\, P(B)$$

Plus généralement, si $A_1, \ldots, A_m$ sont des événements tels que $P\left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i\right) > 0$, on a :

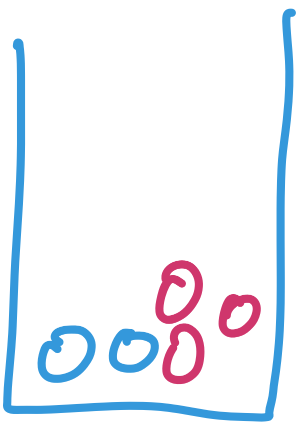
$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) &= P(A_m \mid A_{m-1} \cap \cdots \cap A_2 \cap A_1) \ldots P(A_3 \mid A_2 \cap A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_1) \\ &= \prod_{i=1}^{m} P\Big(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\Big) \end{aligned}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \mid B \cap C)\, P(B \mid C)\, P(C)$$

Temporalité.

$$P(B \cap C) = P(B \mid C)\, P(C)$$

Exemple. Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire successivement et sans remise n boules de cette urne. Déterminer la probabilité qu'au moins une boule rouge figure dans ce tirage.



ω

$$\Omega = \{B, R\}^n$$

$$= \{(B, R, B, B, R \ldots), \ldots\}$$

$B =$ ~~« on tire une boule blanche »~~

R = « il y a au moins une boule rouge »

B_k = « tirer une boule blanche au k^e tirage »

$\omega \in R \iff \exists k \in [\![1, n]\!]$ tq $\omega \in \overline{B_k}$

$\iff \omega \in \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B_k}$

donc $R = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B_k}$

$= \overline{\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k \right)}$

<u>Avec</u> $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)$ par les probas composées

$\xrightarrow{\text{temporalité}}$

$= P(B_1)\, P(B_2 | B_1)\, P(B_3 | B_1 \cap B_2) \dots$

$P(B_k | B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}) \dots P(B_n | B_1 \dots B_{n-1})$

<u>Sachant $B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}$:</u>

on a tiré $k-1$ boules blanches dans l'urne, donc

il reste $n-k+1$ boules blanches et

n boules rouges

donc $P(B_k | B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}) = \dfrac{n-k+1}{2n-k+1}$

<u>Donc</u> $P(R) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \dfrac{n-k+1}{2n-k+1}$ [...]

4.3 Probabilités totales

Probabilités totales.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet ou quasi-complet d'événements, avec I fini ou dénombrable.
Pour tout événement B :

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B|A_i)P(A_i)$$

Remarque.

- *On adopte la convention (raisonnable) que $P(B|A_i)P(A_i) = 0$ lorsque $P(A_i) = 0$.*
- *On précisera toujours le système complet ou quasi-complet d'événements utilisé pour appliquer ce théorème.*
- *Dans le cas fréquent du système complet d'événements $\{A, \overline{A}\}$, la formule s'écrit :*

$$P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap \overline{A}) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})$$

"On calcule $P(B)$ en conditionnant par les A_i".

Preuve :

- Cas où $(A_i)_i$ est un système complet d'événements.

$$\Omega = \underset{\substack{i\in I \\ \text{disjointe}}}{\bigcup} A_i$$

donc

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B\cap\Omega) \\ &= P\Big(\underset{\substack{i\in I \\ \text{disjointe}}}{\bigcup} (B\cap A_i)\Big) \\ &\quad \downarrow \text{ par } \sigma\text{-additivité} \\ &= \sum_{i\in I} P(B\cap A_i) \\ &= \sum_{i\in I} P(B|A_i)\,P(A_i) \end{aligned}$$

Remarque : si A_i est négligeable, $P(B|A_i)$ n'existe pas

on convient que $P(B|A_i)P(A_i) = 0$

$$\underset{\parallel}{} \quad P(B\cap A_i) \leq P(A_i) = 0$$

- Si $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet d'événements.

On note $C = \bigcup_{i\in I} A_i$

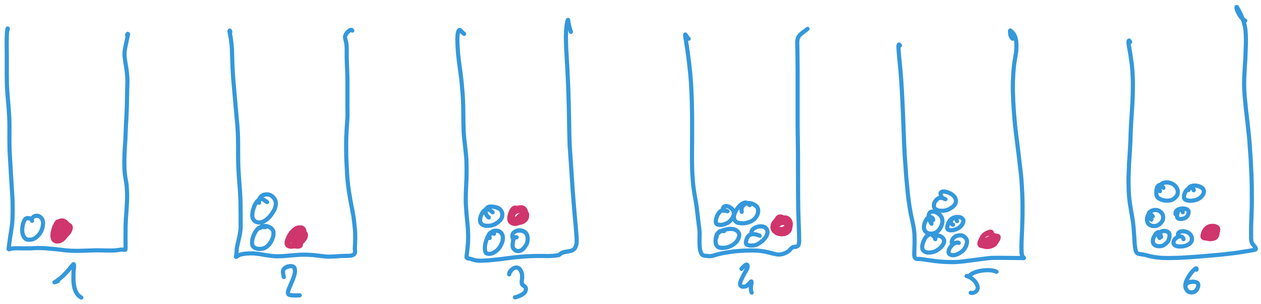
Par hypothèse, B est presque-sûr ie $P(C)=1$.

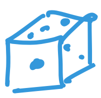
Alors $(\overline{C}, A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements.

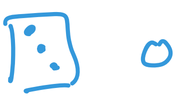
Par les probas totales :

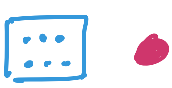
$$P(B) = \underbrace{P(B\cap \overline{C})}_{\substack{\leq P(\overline{C}) \\ = 1-P(C) \\ = 0}} + \sum_{i\in I} P(B|A_i)P(A_i)$$

Exemple. On dispose de six urnes numérotées de 1 à 6. L'urne numéro k comporte k boules blanches et une boule rouge. Un joueur lance un dé équilibré, puis choisit une boule dans l'urne correspondant au résultat du dé. Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche.





$\omega^1 = $  $= (3, B)$

$\omega^2 = $  $= (6, R)$

Ω ? $\quad \Omega = [\![1,6]\!] \times \{B, R\}$

$\mathcal{A}$? $\quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

$E =$ « la boule tirée est blanche »

$$= [\![1, 6]\!] \times \{B\} = \{(1, B), (2, B), \dots, (6, B)\}$$

$D_1 =$ « obtenir 1 au dé »

$D_k =$ « obtenir k au dé »

$$= \{k\} \times \{B, R\} = \{(k, B), (k, R)\}$$

$(D_k)_{k \in [\![1,6]\!]}$ est un système complet d'événements.

Donc par les probas totales :

$$P(E) = \sum_{k=1}^{6} P(E \mid D_k)\, P(D_k)$$

Avec :

- Sachant D_k, on tire une boule dans l'urne k qui contient k boules blanches et $k+1$ boules au total, donc $P(E \mid D_k) = \dfrac{k}{k+1}$
- $P(D_k) = \dfrac{1}{6}$ car le dé est équilibré

Donc

$$P(E) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot \frac{k}{k+1}$$

$$= [\dots].$$

4.4 Formule de Bayes

Formule de Bayes.

Soit A et B deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})} \qquad \text{si de plus } P(\overline{A}) \neq 0 \end{aligned}$$

$\frac{P(B \cap A)}{P(B)}$

Plus généralement, si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, avec I au plus dénombrable, alors pour tout événement B de probabilité non nulle et tout i :

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{k \in I} P(B|A_k)P(A_k)}$$

en adoptant la convention $P(B|A_i)P(A_i) = 0$ si $P(A_i) = 0$.

$$P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B)$$

$$\shortparallel$$

$$P(B \cap A) = P(B|A)\,P(A)$$

Exemple.

1. On dispose d'un test de dépistage d'une maladie. En principe, celui-ci est positif si le patient est malade, mais le test n'est pas fiable à 100 %.
   Plus précisément, si le patient est malade alors le test est positif 99.9 fois sur 100.
   Mais 4 fois sur 1000 il est positif sur une personne non malade.
   On sait qu'environ 2 ‰ de la population est atteinte de la maladie.
   Quelle est la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif ?
2. On dispose d'un second test de dépistage de la même maladie, moins bon que le premier. Mais on le teste maintenant sur la population qui s'est révélée positive au premier test.
   Si la personne est malade le test B est positif 97 fois sur 100. Mais 8 fois sur 1000 il est positif sur une personne non malade. Environ 1/3 de la population testée est atteinte de la maladie.
   Quelle est la probabilité qu'une personne testée soit malade sachant que le test B est positif ?

$M =$ « le patient est malade » $\qquad P(M) = \frac{2}{1000}$

$T =$ « le test est positif » $\qquad P(T|M) = \frac{999}{1000}$

$P(T|\overline{M}) = \frac{4}{1000}$

On cherche

$$P(M|T) = \frac{P(T|M)\,P(M)}{P(T)} \qquad \text{(Bayes)}$$

$$= \frac{P(T|M)\,P(M)}{P(T|M)\,P(M) + P(T|\overline{M})\,P(\overline{M})}$$

$$= \frac{\frac{999}{1000} \cdot \frac{2}{1000}}{\frac{999}{1000} \cdot \frac{2}{1000} + \frac{4}{1000} \cdot \frac{998}{1000}}$$

$$= \frac{999 \cdot 2}{999 \cdot 2 + 4 \cdot 998}$$

$$\simeq \frac{1}{3}$$

2. On dispose d'un second test de dépistage de la même maladie, moins bon que le premier. Mais on le teste maintenant sur la population qui s'est révelée positive au premier test.
   Si la personne est malade le test B est positif 97 fois sur 100. Mais 8 fois sur 1000 il est positif sur une personne non malade. Environ 1/3 de la population testée est atteinte de la maladie.
   Quelle est la probabilité qu'une personne testée soit malade sachant que le test B est positif ?

M_2 = « le patient est malade » $P(M_2) = \frac{1}{3}$

B = « le test B est positif » $P(B|M_2) = \frac{970}{1000}$

$P(B|\overline{M_2}) = \frac{8}{1000}$

donc $P(M_2|B) = \frac{P(B|M_2) \cdot P(M_2)}{P(B|M_2)\,P(M_2) + P(B|\overline{M_2})\,P(\overline{M_2})}$

$$= \frac{970 \cdot \frac{1}{3}}{970 \cdot \frac{1}{3} + 8 \cdot \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{970}{986}$$

$$\simeq 96,..\ \%$$

5 Indépendance

5.1 Indépendance de deux événements

Définition. Deux événements A et B sont dits **indépendants** si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

Remarque. *Dans le cas où $P(B) > 0$, cela revient à dire $P(A \mid B) = P(A)$, c'est-à-dire que la réalisation de B n'influe pas sur la réalisation de A.*
Deux événements disjoints ne sont en général pas indépendants : la réalisation de l'un interdit la réalisation de l'autre.

Proposition. Si A et B sont indépendants, alors :

- A et $\overline{B}$ sont indépendants
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

5.2 Indépendance d'une famille ~~finie~~ d'événements

Définition. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements.

- Les événements sont **deux à deux indépendants** si et seulement si, pour tout $i,j \in \{1,\dots,m\}$:
$$i \neq j \implies P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\,P(A_j)$$
- Les événements sont **indépendants** si et seulement si, pour toute partie finie non vide $J \subset I$,
$$P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i)$$

Remarque. *On utilise parfois l'expression « mutuellement indépendants » pour désigner l'indépendance. Des événements peuvent être deux à deux indépendants sans être indépendants.*

Proposition. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements indépendants. Pour tout i, on définit $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$. Alors $(B_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements indépendants.

Exemple. On lance deux dés discernables, et on considère les événements :

$$\begin{aligned} A &= \text{« le premier dé donne un résultat pair »} \\ B &= \text{« le second dé donne un résultat pair »} \\ C &= \text{« la somme des résultats des deux dés est paire »} \end{aligned}$$

Les événements A, B et C sont deux à deux indépendants mais ne sont pas (mutuellement) indépendants.