Pour ve : 82.7 , 56.1

Espaces probabilisés

1 Espaces probabilisables, espaces probabilisés

1.1 Tribu, espace probabilisable

Définition. Soit Ω un ensemble. On appelle **tribu** sur Ω tout $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

- $\varnothing \in \mathscr{A}$
- $\mathscr{A}$ est stable par passage au contraire : $A \in \mathscr{A} \implies \overline{A} \in \mathscr{A}$
- $\mathscr{A}$ est stable par union dénombrable : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$, alors $\cancel{\bigcup n \in \mathbb{N} A_n \in \mathscr{A}}$.

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$

Remarque. *$\mathscr{A}$ est bien une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, donc ses éléments sont des parties de Ω.*

Remarque. *On dit parfois que $\mathscr{A}$ est une σ-algèbre.*

Proposition. Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω. Alors :

- $\Omega \in \mathscr{A}$
- $\mathscr{A}$ est stable par intersection dénombrable : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.
- $\mathscr{A}$ est stable par union ou intersection finie.

- $\Omega = \overline{\varnothing}$ $\quad$ $\varnothing \in \mathscr{A}$ et $\mathscr{A}$ stable par passage au contraire donc $\Omega \in \mathscr{A}$.

- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille d'éléments de $\mathscr{A}$.

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \overline{\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right)}$$

$A_n \in \mathscr{A}$ donc $\overline{A_n} \in \mathscr{A}$
$\mathscr{A}$ stable par union dénombrable

et passage au contraire.

- Soit $(A_n)_{0 \leq n \leq N}$ famille finie d'éléments de $\mathcal{A}$.

On pose $A_{N+1} = A_{N+2} = \cdots = \Omega$

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ famille dénombrable d'élément de $\mathcal{A}$

donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=0}^{N} A_n \cap \underbrace{\bigcap_{n \geq N+1} \cancel{A_n}^{\Omega}}_{\Omega} = \bigcap_{n=0}^{N} A_n$$

$\mathcal{A}$ stable par union au plus dénombrable

Exemple.

- $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω, appelée parfois la **tribu discrète**
- $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu sur Ω, appelée parfois la **tribu grossière**
- Pour $A \subset \Omega$, $\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu, parfois appelée la **tribu engendrée par** A

A événement.

$A \subset \mathcal{P}(\Omega)$

Définition. Lorsque $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω, on dit que $(\Omega, \mathscr{A})$ est un **espace probabilisable**. Ω s'appelle **l'univers**, et les éléments de $\mathscr{A}$, qui sont des parties de Ω, s'appellent les **événements**. Retenons que les événements sont donc des **collections d'épreuves**.

Vocabulaire.

- Pour A événement, $\overline{A}$ est l'événement contraire.
- Pour A, B événements, $A \cap B$ est l'événement « A et B »
- Pour A, B événements, $A \cup B$ est l'événement « A ou B »
- Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les événements sont **disjoints** ou incompatibles.
- $\varnothing$ est l'événement impossible, Ω est l'événement certain.

Vocabulaire.

- Un élément de l'univers $\omega \in \Omega$ est une **épreuve** ou **réalisation de l'expérience aléatoire**
- Pour A événement, $\omega \in A$ signifie que ω **réalise** A
- Si A et B sont des événements, $A \subset B$ signifie que la réalisation de A implique la réalisation de B.

Définition. Une famille $(A_i)_{i \in I}$ au plus dénombrable d'événements est un **système complet** d'événements si les événements sont deux à deux disjoints, et l'union certaine :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$$

$A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$

"partition" "recouvrement disjoint"

1.2 Probabilité, espace probabilisé

Définition. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application P : $\mathscr{A} \to \mathbb{R}$ telle que :

$P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$

- P est à valeurs dans $[0, 1]$
- $P(\Omega) = 1$
- P satisfait la propriété de σ-additivité, i.e. si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux disjoints, alors :

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Proposition. On a aussi les propriétés suivantes :

- $P(\varnothing) = 0$
- Pour A, B événements disjoints, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Pour $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ famille finie d'événements disjoints deux à deux.

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

Définition. Lorsque P est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$, on dit que $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un **espace probabilisé**.

On pose $A_0 = A$ $\quad A_1 = B \quad A_n = \varnothing \quad \forall n \geq 2$

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille dénombrable d'événements 2 à 2 disjoints

donc, par σ-additivité : $\quad$ dans ~~$[0, +\infty]$~~

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$$

$$P(A \cup B \cup \varnothing) \qquad P(A) + P(B) + \underbrace{P(\varnothing) + \dots}_{=0}$$

$\{\omega_1\}$ est un événements

1.3 Cas très simple : probabilité sur un univers fini

Si Ω est fini, on prend $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, et on simplifie la propriété de σ-additivité en :

$$\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont deux événements disjoints, alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Notant $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, les événements $\{\omega_i\}$ s'appellent **événements élémentaires**, et la donnée des $P(\{\omega_i\})$ (notée plutôt $P(\omega_i)$) définit P, en posant pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$.

Exemple. Avec $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de la probabilité uniforme, calculer $P(A)$ où A est l'événement des épreuves paires.

$\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{1}{6} \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$A = \{2, 4, 6\} \qquad 1 \qquad \{1\}$$

$$= \bigcup_{\omega \in \{2,4,6\}} \{\omega\}$$

$$= \bigcup_{k=1}^{3} \{2k\} \quad \text{disjoints}$$

$$P(A) = \sum_{k=1}^{3} P(\{2k\}) \quad \text{par } \sigma\text{-additivité}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Exemple. Lorsque l'on joue au jeu de l'oie, on lance simultanément deux dés équilibrés à six faces.

- Un univers naturel pour représenter les épreuves possibles :

  ⚀⚀ ⚀⚁ ⚀⚂ ... ⚂⚅ ⚃⚀ ⚃⚁ ... ⚃⚅ ⚄⚅ ⚅⚅

  est :
$$\Omega = [\![1, 6]\!]^2$$
  que l'on munit de la probabilité uniforme.

- « Faire un double-six » est un événement élémentaire, représenté par le singleton $\{(6, 6)\}$.

- « Faire au moins 10 » est un événement, représenté dans Ω par le sous-ensemble :
$$B = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

- Mais au jeu de l'oie, plutôt que ω, c'est le *nombre* somme des valeurs obtenues avec les deux dés qui nous intéresse. On note X la v.a. de la somme des valeurs obtenues. On a alors :
$$X\big((6, 6)\big) = 12 \text{ et } B = (X \geqslant 10)$$

Rappel. Pour Ω fini de cardinal N, la **probabilité uniforme** est l'unique probabilité telle que :
$$\forall \omega \in \Omega,\ P(\{\omega\}) = \frac{1}{N}$$
et alors, pour tout événement A :
$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

1.4 Cas simple : probabilité sur un univers dénombrable

Si Ω est dénombrable, on prend aussi $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Notant $\Omega = \{\omega_0, \dots, \omega_n, \dots\}$, les événements $\{\omega_i\}$ s'appellent **événements élémentaires**, et la donnée d'une famille $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels positifs sommable et de somme 1 permet de définir une unique probabilité P telle que $P(\{\omega_i\}) = p_i$ pour tout i. On a encore, pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\})$.

$A \in \mathcal{P}(\Omega)$ tribu

événement

$A = \{\omega \in \Omega \text{ tq } \omega \in A\}$

$= \{\omega_{i_k},\ k \in K\}$. $K \subset \mathbb{N}$

$= \bigcup_{\omega\in A} \{\omega\} = \bigcup_{k\in K} \{\omega_{i_k}\}$

disjointe disjointe

par σ-additivité $P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\}) = \sum_{k\in K} p_{i_k}$

Exemple. Avec $\Omega = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) = \frac{1}{2^n}$, calculer $P(A)$ où A est l'événement des épreuves paires.

$P(\{n\})$ plutôt...

Remarque : $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien une distribution de probabilités

* $\forall n$ $\frac{1}{2^n} \geq 0$
* et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ série géom cv

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$

$= 1$

On définit donc bien une proba en posant $P(\{n\}) = \frac{1}{2^n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

$A = \{ n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } n \text{ pair} \}$

$= \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \{2k\}$ union disjointe

donc par σ-additivité

$$P(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} P(\{2k\})$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}}$$ somme géométrique

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{3}$$

1.5 Exemple d'un univers non dénombrable : le jeu de pile ou face

Exemple. Prenons l'exemple de $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$, qui n'est pas dénombrable. Il modélise l'expérience consistant à tirer une infinité de fois à pile ou face.

- Pour mieux comprendre, il est conseillé de « mimer » quelques réalisations de l'expérience aléatoire :

$$\omega^1 = FPFPPFPFFPPFPFFP\ldots \qquad F_2$$
$$\omega^2 = FFPFFPFPPFPFFPPF\ldots$$
$$\omega^3 = FFFFFFFFFFFFFFFF\ldots \qquad \text{uniquement des faces}$$
$$\omega^4 = PFPFPFPFPFPFPFPF\ldots \qquad \text{alternance parfaite pile/face}$$

- On admet qu'il n'est pas possible de choisir pour tribu l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$, qui est trop gros, ce qui obligera à définir une probabilité nulle pour chaque événement élémentaire.

- Définissons :

$$P_k = \{\omega \in \{P, F\}^{\mathbb{N}^*},\ \omega_k = P\} = \text{« le } k\text{-ième lancer a donné pile »}$$
$$F_k = \overline{P_k} = \{\omega \in \{P, F\}^{\mathbb{N}^*},\ \omega_k = F\} = \text{« le } k\text{-ième lancer a donné face »}$$

que l'on appellera entre nous **événements primitifs**.

- Par exemple

$$P_3 = \text{« le troisième lancer a donné pile »}$$

Cet événement est réalisé par ω^2 et ω^4, mais pas par ω^1 ni ω^3.

- On admet que l'on peut définir une tribu $\mathscr{A}$ contenant les événements primitifs. Celle-ci contient donc aussi les événements obtenus par unions et intersections au plus dénombrables d'événements primitifs.

- Par exemple, on définit des événements en posant :

$$E_1 = F_1 \cap P_2 \cap F_3,\ E_2 = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k,\ E_3 = P_3 \cap F_3$$

$F_1 P_2 F_3$

On peut alors se demander si les épreuves précédentes réalisent ou non ces événements.

- Une façon de comprendre l'événement P_2 est d'écrire :

$$P_2 = \{\star P \star\star\star\star\star\star\ldots\} \subset \Omega$$

- On note X le rang d'apparition du premier pile : c'est une v.a. avec $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et :

$$X(\omega^1) = 2,\ X(\omega^2) = 3,\ X(\omega^3) = +\infty \text{ et } X(\omega^4) = 1$$

L'épreuve ω^2 réalise l'événement $(X = 3)$, et $(X = 3) = F_1 \cap F_2 \cap P_3$.

- Fixons $p \in]0, 1[$. Il existe une probabilité P définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$ par :

$$P(P_k) = p,\ P(F_k) = 1 - p,$$

et ce qui sera plus tard l'indépendance de P_i et P_j pour $i \neq j$, de sorte que, par exemple :

$$P(E_1) = (1 - p)p(1 - p) = p(1 - p)^2$$

$$P(E_1) = P(F_1 \cap P_2 \cap F_3)$$
$$= P(F_1)\, P(P_2)\, P(F_3) \quad \text{indep}$$
$$= (1-p) \quad p \quad (1-p)$$

1.6 Espaces probabilisés discrets

Définition. Soit Ω un ensemble. Une **distribution de probabilités discrètes** sur Ω est une famille $(p_\omega)_{\omega in \Omega}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$, indexée par Ω, et de somme 1.

Le **support** de cette distribution de probabilité est l'ensemble des ω tels que $p_\omega > 0$.

Proposition. Le support d'une distribution de probabilités discrète est au plus dénombrable.

Définition. Soit Ω un ensemble, et $(p_\omega)_{\omega in \Omega}$ une distribution de probabilités discrètes. On peut munir Ω de la tribu $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité définie sur les événements élémentaires par $P(\omega) = p_\omega$.

$P : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$

$A \longmapsto P(A)$

événement

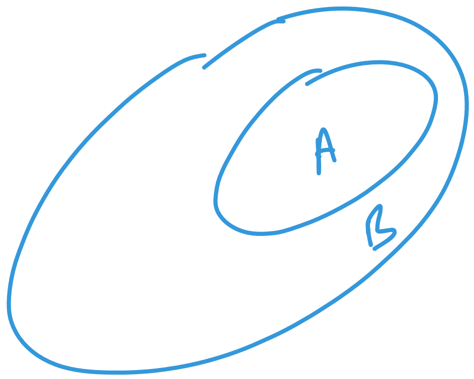
collect° d'épreuves

2 Propriétés des probabilités

Dans toute la suite du chapitre, on considère $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

2.1 Croissance

Proposition. Pour A et B deux événements, si $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$.



disjoints

$B = A \cup (B \setminus A)$

par σ-additivité

$P(B) = P(A) + \overbrace{P(B \setminus A)}^{\geqslant 0}$

$\geqslant P(A)$

2.2 Des réunions

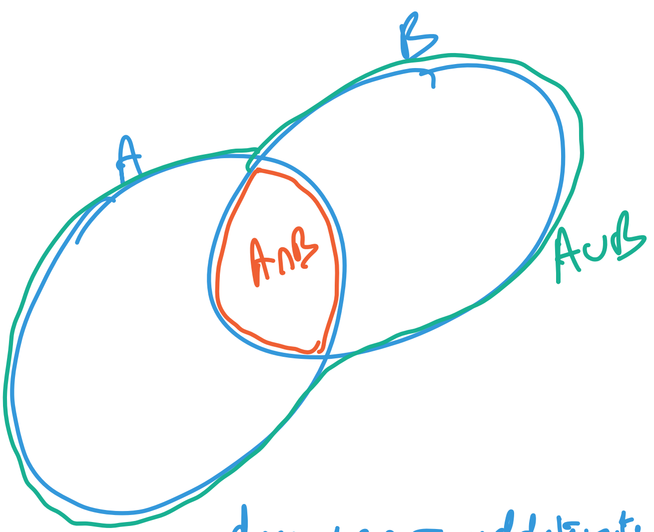
Proposition.

disjoints

- Soit $(A_n)_n$ est une suite d'événements deux à deux disjoints, alors $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.
- Soit $(A_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ est une famille finie d'événements deux à deux disjoints, alors $P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) = \sum_{n=0}^{N} P(A_n)$.

Proposition. Soit A et B deux événements. Alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



disjoints

$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$

$B = (A \cap B) \cup B \setminus A$

disjoints

donc par σ-additivité $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$

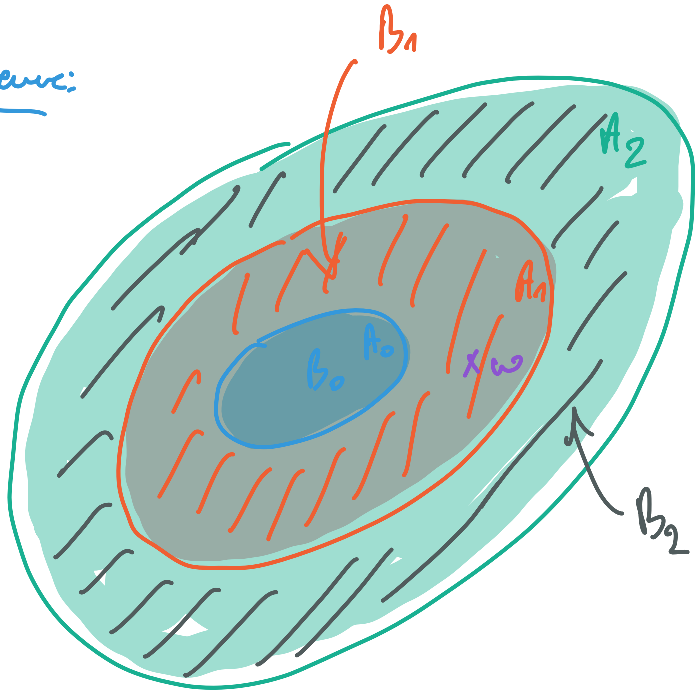
or $P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A)$

Théorème de continuité croissante.

Soit $(A_n)_n$ une suite croissante (pour l'inclusion) d'événements, i.e. $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n. Alors :

$$P(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

Preuve:



On pose $B_0 = A_0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$

- Les B_n sont 2 à 2 disjoints.

Soit n, p tq $n < p$ donc $n \leq p-1$

$B_n = A_n \setminus A_{n-1}$

$\subset A_n$

$\subset A_{p-1}$ par croissance

$B_p = A_p \setminus A_{p-1}$

donc $B_n \cap B_p = \emptyset$

- Mque : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$

$\boxed{\supset}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n \subset A_n$

donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

$\boxed{\subset}$ Soit $\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

donc $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $\omega \in A_n$

On note $E = \{ n \in \mathbb{N}$ tq $\omega \in A_n \}$

partie de $\mathbb{N}$ non vide donc

admet un min, noté k :

$\omega \in A_k$ et $\omega \notin A_{k-1}$ par déf du min

donc $\omega \in A_k \setminus A_{k-1} = B_k$

donc $\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

- Par σ-additivité :

$$P\Big(\underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}}_{\text{disjointe}} B_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(B_n)$$

$$P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) = P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(B_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n)$$

avec $\sum_{k=0}^{n} P(B_k) = \ ?$

(*)

$B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ où $A_{k-1} \subset A_k$

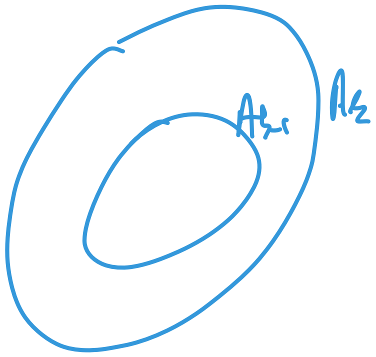
donc $P(B_k) = P(A_k) - P(A_{k-1})$

où $A_{-1} = \emptyset$

donc $\sum_{k=0}^{n} P(B_k) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k) - P(A_{k-1})$

$= P(A_n) - P(\emptyset)$

$= P(A_n)$



$A_k = A_{k-1} \underset{\text{disjoints}}{\cup} B_k$

donc $P(A_k) = P(A_{k-1}) + P(B_k)$

Corollaire. Soit $(A_n)_n$ une suite quelconque d'événements. Alors :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

Remarque. *C'est ce théorème auquel on fera référence lorsque l'on a envie de parler d'événement-limite.*

On note $C_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$

$(C_n)_n$ est une suite croissante d'événements

donc $P(C_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right)$

$= P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$

$= P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$

Proposition (sous-additivité). Soit $(A_n)_n$ une suite quelconque d'événements.

Alors, dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Remarque. *On ne perdra pas de vue que l'inégalité* $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant 1$ *reste vraie, et parfois meilleure que l'inégalité précédente.*

2.3 Continuité décroissante

Théorème de continuité décroissante.

Soit $(A_n)_n$ une suite décroissante (pour l'inclusion) d'événements, i.e. $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout n. Alors :

$$P(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

Corollaire. Soit $(A_n)_n$ une suite quelconque d'événements. Alors :

$$P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

Remarque. *C'est ce théorème auquel on fera référence lorsque l'on a envie de parler d'événement-limite.*