Pour gé 55.25, 55.27

Pour sa : FORUM

Pour lu : DS

Sommabilité, sommes

1 Sommes finies

1.1 Quelques sommes finies classiques

Résultat.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Résultat.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Remarque. *On peut en déduire que* $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ *en développant* $(k+1)^4$ *par la formule du binôme et en sommant pour* $k = 0, \dots, n$.

Résultat.

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} 1\,\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad \sum_{k=1}^{n} x^k = \begin{cases} x\,\dfrac{1-x^{n}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Résultat.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (x+1)^n$$

1.2 Manipulation des sommes finies doublement indexées

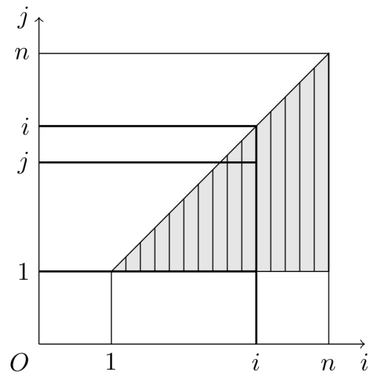
Proposition. Si I et J sont deux ensembles finis et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels ou de complexes, la commutativité (et l'associativité) de l'addition permet de justifier :

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in I}\left(\sum_{i\in J} a_{i,j}\right)$$

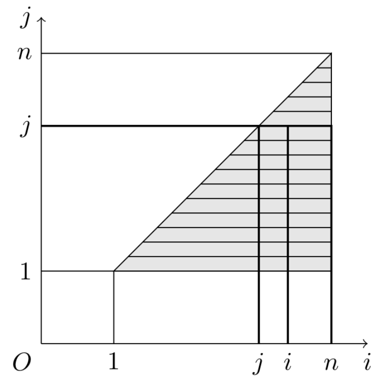
Remarque. *On parle de sommes triangulaires lorsque les $a_{i,j}$ sont nuls pour $i<j$ par exemple. Dans ce cas :*

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}\right)$$

formule qu'il convient de retrouver par le schéma suivant :



D'abord, i varie de 1 à n, puis, pour chaque i fixé, j varie de 1 à i



D'abord, j varie de 1 à n, puis, pour chaque j fixé, i varie de j à n

Remarque. *La distributivité de la multiplication sur l'addition permet d'écrire :*

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j$$

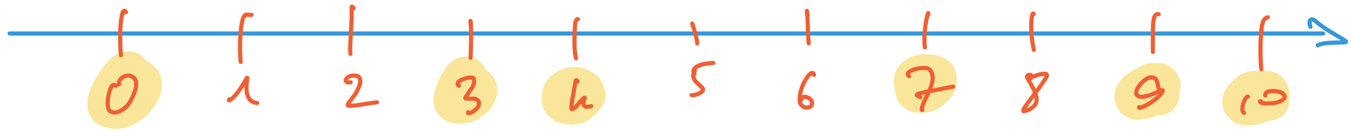
$$= \sum_i \left(a_i \sum_j b_j\right)$$

$$= \sum_i \left(\sum_j a_i b_j\right)$$

2 Ensembles dénombrables

2.1 Parties de $\mathbb{N}$

Proposition. Toute partie de $\mathbb{N}$ est finie ou en bijection avec $\mathbb{N}$.



$$A = \{\underset{0}{0}, \underset{1}{3}, \underset{2}{4}, \underset{3}{7}, \underset{4}{9}, \underset{5}{10} \dots\} \longleftrightarrow \mathbb{N}$$

On suppose $A \subset \mathbb{N}$, A non fini

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow A$$

$$0 \longmapsto \mathrm{Min}(A)$$

$$n \longmapsto \mathrm{Min}(A \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)\})$$

φ injective (st $\nearrow$), surjective

2.2 Dénombrabilité

Définition. Un ensemble A est **dénombrable** s'il existe une bijection entre A et $\mathbb{N}$.
Un ensemble A est **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable.

Proposition. Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Corollaire. Une partie d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable.

Remarque. *Dire qu'un ensemble est au plus dénombrable, c'est que l'on peut énumérer ses éléments, via la bijection de la définition.*

$A = \{x_0, x_1, x_2, x_3 \dots$

2.3 Exemples et contre-exemples

Exemple. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exemple. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Lemme. $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Ça veut dire qu'on ne peut pas énumérer ses éléments

$$\cancel{\mathbb{R} = \{ x_0, x_1, x_2, x_3 \ldots }$$

Preuve: Par l'absurde. On suppose $[0,1[$ dénombrable.

donc $[0,1[= \{ x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots \}$

$x_0 = 0, a_{00}\ a_{01}\ a_{02}\ a_{03} \ldots$ $\quad 0,1351\ldots$

$x_1 = 0, a_{10}\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots$ $\quad 0,2134\ldots$

$x_2 = 0, a_{20}\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \ldots$ $\quad 0,9128\ldots$

Posons $y = 0, b_0\ b_1\ b_2 \ldots$ $\quad b = 0,887\ldots$

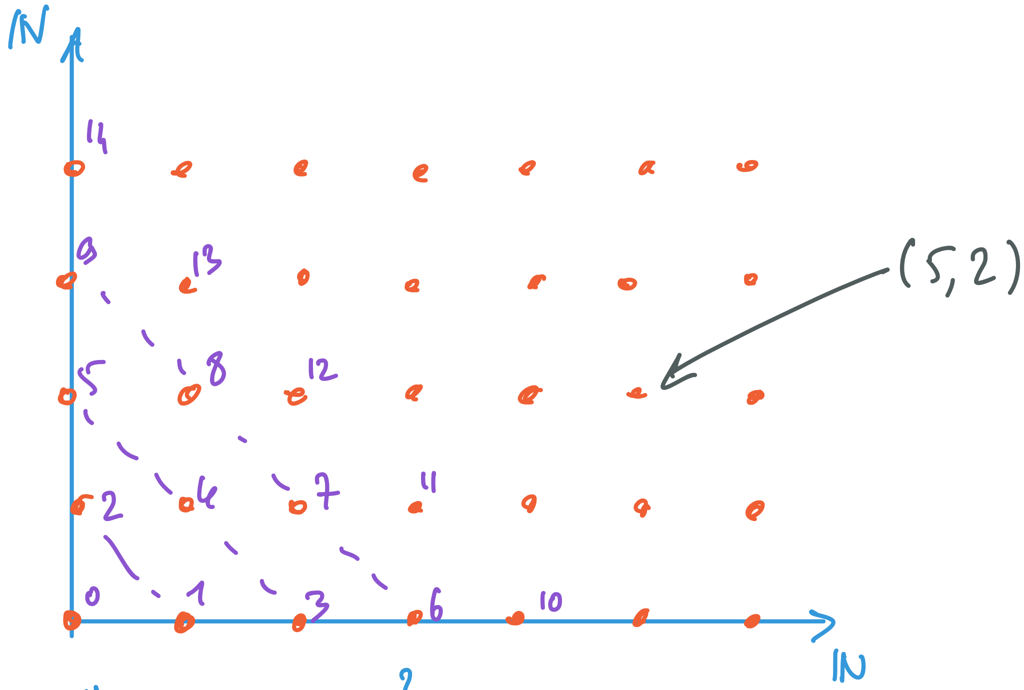
$b_k = 9 - a_{kk}$

$y \in [0,1[$ $\quad \forall k,\ y \neq x_k$

car $b_k \neq a_{kk}$

donc $y \notin \{ x_0, x_1, x_2 \ldots \}$

$\mathbb{N}^2$ dénombrable $= \{ (m,n),\ m \in \mathbb{N} \text{ et } n \in \mathbb{N} \}$



$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2$$
$$k \longmapsto (\,..?\,,\,.?\,)$$

M2
$$\psi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^*$$
$$(m,n) \longmapsto 2^m(2n+1)$$

φ est surjective ? oui

φ est injective ? $2^m(2n+1) = 2^p(2q+1)$

oui

2.4 Opérations sur les ensembles au plus dénombrables

Proposition 1 Si A_1, ..., A_p sont au plus dénombrables, alors le produit cartésien $A_1 \times \cdots \times A_p$ est au plus dénombrable.

Proposition. Toute union finie ou dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

Proposition. S'il existe une surjection $\mathbb{N} \to A$, alors A est au plus dénombrable.

<u>Proposition 1:</u> <u>$p=2$</u>

On suppose A_1, A_2 dénombrables.

il existe φ_1, φ_2 bijections de $\mathbb{N} \to A_1, A_2$

On considère $\varphi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow A_1 \times A_2$

$$(m, n) \longmapsto (\varphi_1(m), \varphi_2(n))$$

φ est bijective

et $\mathbb{N}^2$ est en bijection avec $\mathbb{N}$

donc $A_1 \times A_2$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.

<u>Cas p qcq</u>...

Proposition. S'il existe une surjection $\mathbb{N} \to A$, alors A est au plus dénombrable.

Soit $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow A$ surjective.

$$A = \{ \underset{\underset{\phi(2)}{\shortparallel}}{\phi(0)}, \phi(1), \underset{\underset{\underset{\phi(5)}{\shortparallel}}{\phi(4)}}{\shortparallel}\!\!\!\!\phi(3), \dots$$

On définit sur $\mathbb{N}$ une relation $\mathcal{R}$

$$m \mathcal{R} n \iff \phi(m) = \phi(n)$$

C'est une relation d'équivalence :

* réflexive $\forall n \in \mathbb{N}$ $\phi(n) = \phi(n)$ donc $n \mathcal{R} n$
* symétrique Si $\phi(n) = \phi(m)$ alors $\phi(m) = \phi(n)$
  ie $n \mathcal{R} m$ alors $m \mathcal{R} n$
* transitive Si $\phi(m) = \phi(n)$ et $\phi(n) = \phi(p)$
  alors $\phi(m) = \phi(p)$

On peut donc considérer l'ensemble "quotient"

C = l'ens des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$

$= \{ \overline{n}, n \in \mathbb{N} \}$

On définit $\psi : C \longrightarrow A$

$c \longmapsto \phi(n)$ où $\overline{n} = c$

* ψ est bien définie

si $\overline{n_1} = c$ et $\overline{n_2} = c$

alors $n_1 \mathcal{R} n_2$

donc $\phi(n_1) = \phi(n_2)$

* ψ <u>est injective</u> :

Si $c_1 \neq c_2$ (dans C)

on prend n_1, n_2 tq $\overline{n_1} = c_1$

$\overline{n_2} = c_2$

Alors $n_1 \not\mathcal{R} n_2$

donc $\phi(n_1) \neq \phi(n_2)$

i.e. $\psi(c_1) \neq \psi(c_2)$

* ψ <u>est surjective</u>

car ϕ l'est :

Soit $a \in A$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $a = \phi(n)$

donc $a = \psi(\overline{n})$

<u>Ainsi ψ bijection $C \longrightarrow A$</u>.

On considère $f : C \longrightarrow \mathbb{N}$

$c \longmapsto \mathrm{Min}\{n \in \mathbb{N} \text{ tq } \overline{n} = c\}$

f est bien définie, injective car

si $c_1 \neq c_2$

$\{n_1 \text{ tq } \overline{n_1} = c_1\}$ $\{n_2 \text{ tq } \overline{n_2} = c_2\}$

disjoints.

Bref : On a construit une injection $A \longrightarrow \mathbb{N}$

donc une bijection de $A \longrightarrow$ partie de $\mathbb{N}$

donc A est au plus dénombrable

Proposition. Toute union finie ou dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille dénombrable d'ensembles dénombrables.

$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est dénombrable.

Soit, pour chaque n, $\phi_n : \mathbb{N} \longrightarrow A_n$ surjective

Soit $\varphi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = B$

$(m, n) \longmapsto \phi_n(m)$

φ est surjective :

En effet. Soit $y \in B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

donc $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $y \in A_n$

or ϕ_n surjective donc $\exists m \in \mathbb{N}$

tq $y = \phi_n(m)$

$= \psi(n, m)$

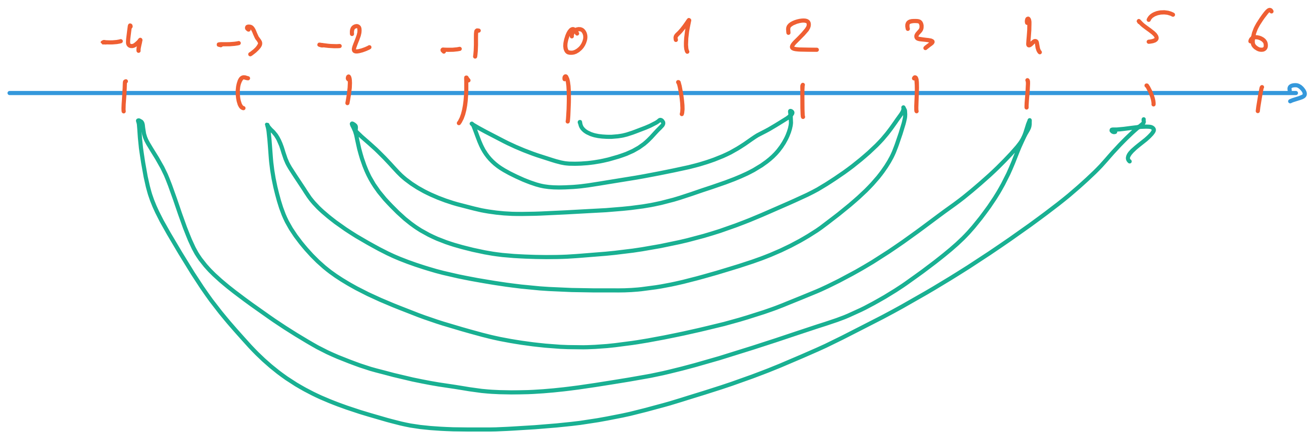
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{bijection}"] \arrow[rr, bend left, "\text{surjective}"] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "\psi", "\text{surjective}"'] & B
\end{tikzcd}$$

donc B est au plus dénombrable.

2.5 D'autres exemples

Exemple. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^p$ sont dénombrables.

Proposition. $\mathbb{Q}$ est dénombrable.



$$\mathbb{Q} \sim \cancel{\mathbb{N}^2} \sim \cancel{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}} \sim \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$$

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\text{biji}} \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Q} \quad \text{surjection}$$

$$(a, b) \longmapsto \frac{a}{b}$$

A au plus dénombrable $\iff$ on peut énumérer ses éléments

Un produit d'ens dénombrables est dénombrable

Une union au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrable est au plus dénombrable.

3 Somme d'une famille de réels positifs

3.1 Définition

Définition. Soit I un ensemble quelconque (fini ou infini, voire non dénombrable) et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indexée par I. On définit alors **la somme de la famille** $(u_i)_{i\in I}$ dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$ comme étant :

$$\sum_{i\in I} u_i = \mathrm{Sup}\{\sum_{j\in J} u_j,\ J \text{ partie finie de } I\}$$

Remarque. *On peut étendre naturellement cette définition aux familles* $(u_i)_{i\in I}$ *où* $u_i \in [0,+\infty] = [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$.

Proposition. Lorsque I est fini, la somme de la famille est sa somme.

Proposition. Lorsque $I = \mathbb{N}$ (et toujours $u_n \geqslant 0$ pour tout n) :

- si la série $\sum u_n$ converge, sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, au sens des sommes de séries convergentes, est égale à la somme $\sum_{n\in N} u_n$, au sens des familles sommables.
- si la série $\sum u_n$ diverge, sa somme $\sum_{n\in N} u_n$ au sens des familles sommables vaut $+\infty$. On peut donc raisonnablement noter $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

3.2 Invariance par permutation

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, avec I au plus dénombrable, et σ une permutation de I, c'est-à-dire une bijection : $I \to I$. Alors, dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$$

Remarque. *Ça signifie que l'ordre de sommation des familles (au plus dénombrables) de réels positifs n'intervient pas dans la valeur de la somme.*

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, avec I dénombrable. On peut **énumérer** les éléments de I en proposant une bijection : $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & I \\ k & \mapsto & i_k \end{array}$

Dans ce cas, dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{i_k}$$

3.3 Sommation par paquets

Définition. Soit I un ensemble. On dit que $(I_j)_{j\in J}$ est une **partition de** I, ou encore un **recouvrement disjoint de** I si et seulement si :

$$\bigcup_{j\in J} I_j = I \quad \text{et} \quad j \neq j' \implies I_j \cap I_{j'} = \varnothing$$

Remarque. *En toute rigueur, on parle de* **partition** *lorsqu'aucun des I_j n'est vide.*

Théorème.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, et $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I.
Alors, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I_j} u_i \right)$$

Remarque. *En pratique, on dit que l'on a sommé en faisant des « paquets », les sous-familles $(u_i)_{i\in I_j}$.*

3.4 Théorème de Fubini positif

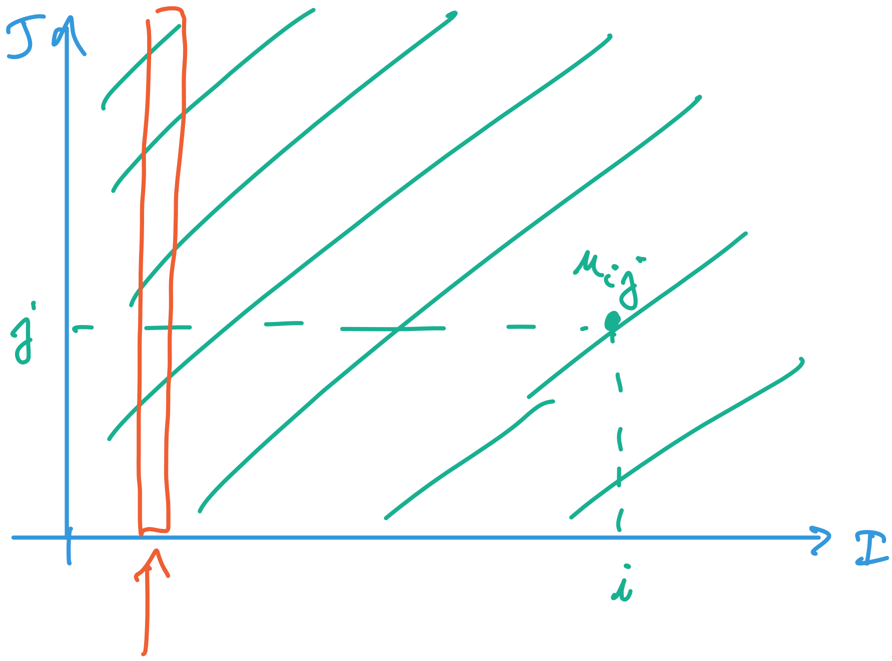
Théorème.

Soit I, J deux ensembles et $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels positifs.
Alors, dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$:

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)$$

et ces sommes valent $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j}$.

Remarque. *Il s'agit simplement de sommer par paquets, avec des paquets naturels.*



1 paquet $\displaystyle\sum_{j\in J} u_{i,j}$

i fixé

3.5 Opérations

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$, $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs, indexées par le même ensemble I.
Alors, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

(pas de différence !)

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i$$

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$, $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs, indexées par le même ensemble I.
Si, pour tout $i \in I$, $0 \leqslant u_i \leqslant v_i$, alors, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i$$

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Soit $J \subset I$ une partie de I.
Alors, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

3.6 Sommabilité d'une famille de réels positifs

Définition. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs.
On dit que $(u_i)_{i \in I}$ est **sommable** si et seulement si $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$.

Proposition. Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de réels positifs, alors le nombre d'éléments > 0 de la famille est au plus dénombrable.

Rmq : si la famille est sommable, il y a un nb au plus dénombrable de termes $\neq 0$.

→ on peut énumérer ses éléments donc on peut l'indexer par $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$.

Preuve : $J = \{ i \in I \mid u_i > 0 \}$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \underbrace{\{ i \in I \mid u_i \geq \tfrac{1}{n} \}}_{\text{est fini car } \sum u_i < +\infty}$$

union dénombrable d'ensembles finis, donc au plus dénombrable.

Rmq : si $(u_i)_i$ sommable, on peut "éliminer" les termes nuls et il reste un nb dénombrable d'éléments.

La sommabilité de $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$, c'est la cv de $\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i$ série

$\sum \frac{\sin n}{n}$ cv, non abs cv $\left(\frac{\sin n}{n}\right)_n$ non sommable

4 Familles sommables de réels quelconques, ou de complexes

4.1 Définitions

Définition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes. On dit que $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** si et seulement si $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable, i.e. :

$$(u_i)_{i\in I} \text{ est sommable} \iff \sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$$

Définition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres réels. On définit sa **somme** comme :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-$$

$u_i = u_i^+ - u_i^-$

$|u_i| = u_i^+ + u_i^-$

où $u_i^+ = \mathrm{Max}(u_i, 0)$ et $u_i^- = \mathrm{Max}(-u_i, 0)$.

Remarque. *Il s'agit d'une définition théorique, jamais utilisée en pratique. Pour le calcul effectif, on décrit les u_i en extension par une énumération, on fait des paquets etc.*

Définition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. On définit sa **somme** comme :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(u_i) + \mathrm{i} \sum_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i)$$

Remarque. *Lorsque la famille $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est indexée par $\mathbb{N}$, elle est sommable si et seulement si la série $\sum u_i$ converge absolument. Dans ce cas, sa somme est la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou complexes, et $(v_i)_i$ une famille sommable de réels positifs. Si, pour tout $i \in I$, $|u_i| \leqslant v_i$, alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

$\forall i \quad 0 \leq u_i^+ \leq |u_i|$ donc $(u_i^+)_i$ est sommable

$0 \leq u_i^- \leq |u_i|$ — $(u_i^-)_i$ est sommable

4.2 Invariance par permutation

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou de complexes, et σ une permutation de I. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ l'est. Dans ce cas :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$$

4.3 Sommation par paquets

Théorème.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou complexes, et $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I. On suppose $(u_i)_{i\in I}$ sommable. Alors :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)$$

Attention. *Pour appliquer ce théorème, Il faut d'abord justifier la sommabilité de $(u_i)_{i\in I}$, par exemple en montrant que $\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j}|u_i|\right) < +\infty$.*

4.4 Théorème de Fubini

Théorème.

Soit I, J deux ensembles et $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels ou complexes. On suppose $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ sommable. Alors :

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)$$

et ces sommes valent $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j}$.

Remarque. *Il s'agit simplement de sommer par paquets, avec des paquets naturels.*

Attention. *Pour appliquer ce théorème, Il faut d'abord justifier la sommabilité de $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, par exemple en montrant que $\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}|u_{i,j}|\right) < +\infty$, ou l'autre.*

Proposition. Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont deux familles de réels ou complexes sommables, alors $(a_ib_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_ib_j = \Big(\sum_{i\in I} a_i\Big)\Big(\sum_{j\in J} b_j\Big)$$

Ce résultat s'étend au produit d'un nombre fini de familles sommables.

Remarque. *La proposition précédente, dans le cas de familles indexées par $\mathbb{N}$, est le résultat « produit de Cauchy » de séries absolument convergentes, avec des paquets bien choisis pour la famille doublement indexée.*

Lien avec le produit de Cauchy.

$(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ $\qquad$ $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$

on les suppose sommables.

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i$$

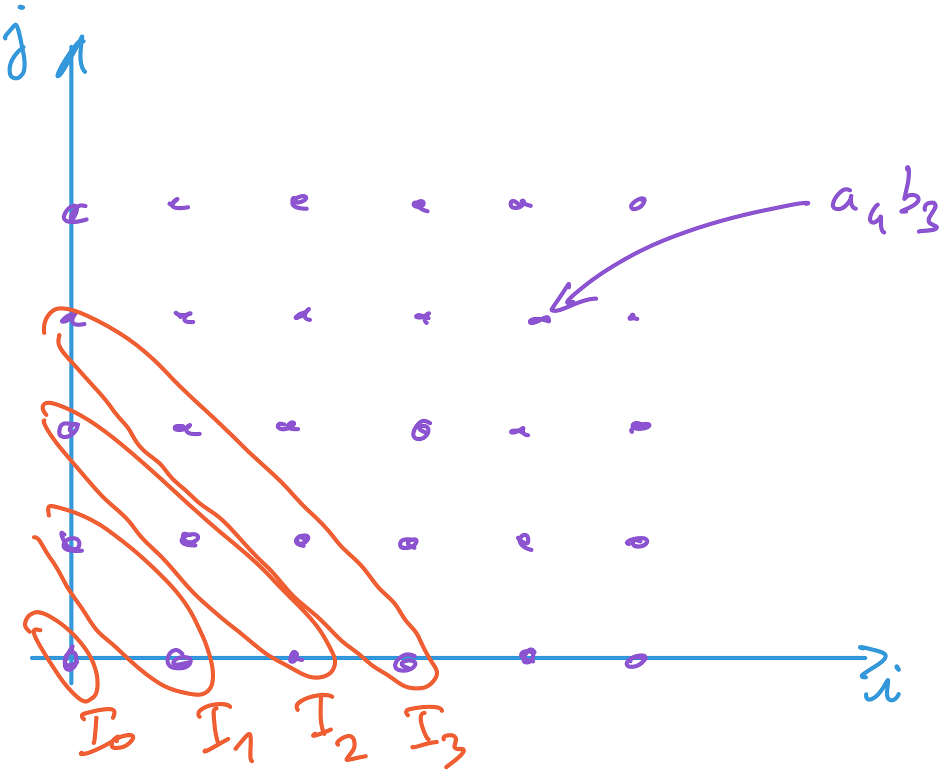
$$\Big(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i\Big)\times\Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j\Big)$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{N}}\Big[a_i\Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j\Big)\Big]$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} a_ib_j\Big)$$

Fubini

$$= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_ib_j$$



$(a_i b_j)_{i,j \in \mathbb{N}}$ sommable

On fait des paquets : $I_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \text{ tq } i+j=n\}$

$$\mathbb{N}^2 = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \text{disjointe}}} I_n$$

$$\sum_{i,j \in \mathbb{N}^2} a_i b_j = \sum_{n \in \mathbb{N}} \Big(\sum_{\substack{(i,j) \in I_n \\ i+j=n}} a_i b_j \Big)$$

$i = 0$ à n

$j = n - i$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \Big)$$

4.5 Opérations, espace $\ell^1(I)$

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$, $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels ou complexes, indexées par le même ensemble I. Soit λ et μ deux scalaires. On suppose que $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont sommables. Alors $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable et :

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i$$

Définition. On note $\ell^1(I)$ l'espace vectoriel des familles sommables indexées par I.

Remarque. *Il s'agit, selon le contexte, du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des familles sommables de complexes indexées par I, ou alors du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des familles sommables de réels indexées par I.*

$\ell^2(I) = \{ (x_i)_{i\in I}$ tq $(x_i^2)_{i\in I}$ sommable

ie $\sum_{i\in I} |x_i|^2 < +\infty \}$