Pour voir : 55.2, 55.4, 55.5

$\sum a_n x^n$ $\quad R \quad$ $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ $\quad \forall x \in]-R, R[\ldots$

$f(x)$ $\longrightarrow \exists ?$ $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$x \in \mathcal{D}_f$.

4 Développement en série entière en 0 d'une fonction d'une variable réelle

4.1 Développement en série entière d'une fonction

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0.

On dit que f **est développable en série entière sur** $]-r, r[$ ou **admet un développement en série entière** si et seulement si $]-r, r[\subset I$ et il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que :

$$\forall x \in]-r, r[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Remarque. *Souvent, on ne précise pas la valeur de $r > 0$, on dit simplement que f est développable en série entière **au voisinage de** 0 ou **en** 0.*

Remarque. *La fonction f peut être définie sur un intervalle plus grand que $]-R, R[$ ou $[-R, R]$.*

En revanche, si f n'est pas continue en $x_0 \neq 0$, alors $R \leqslant |x_0|$.

Exemple :

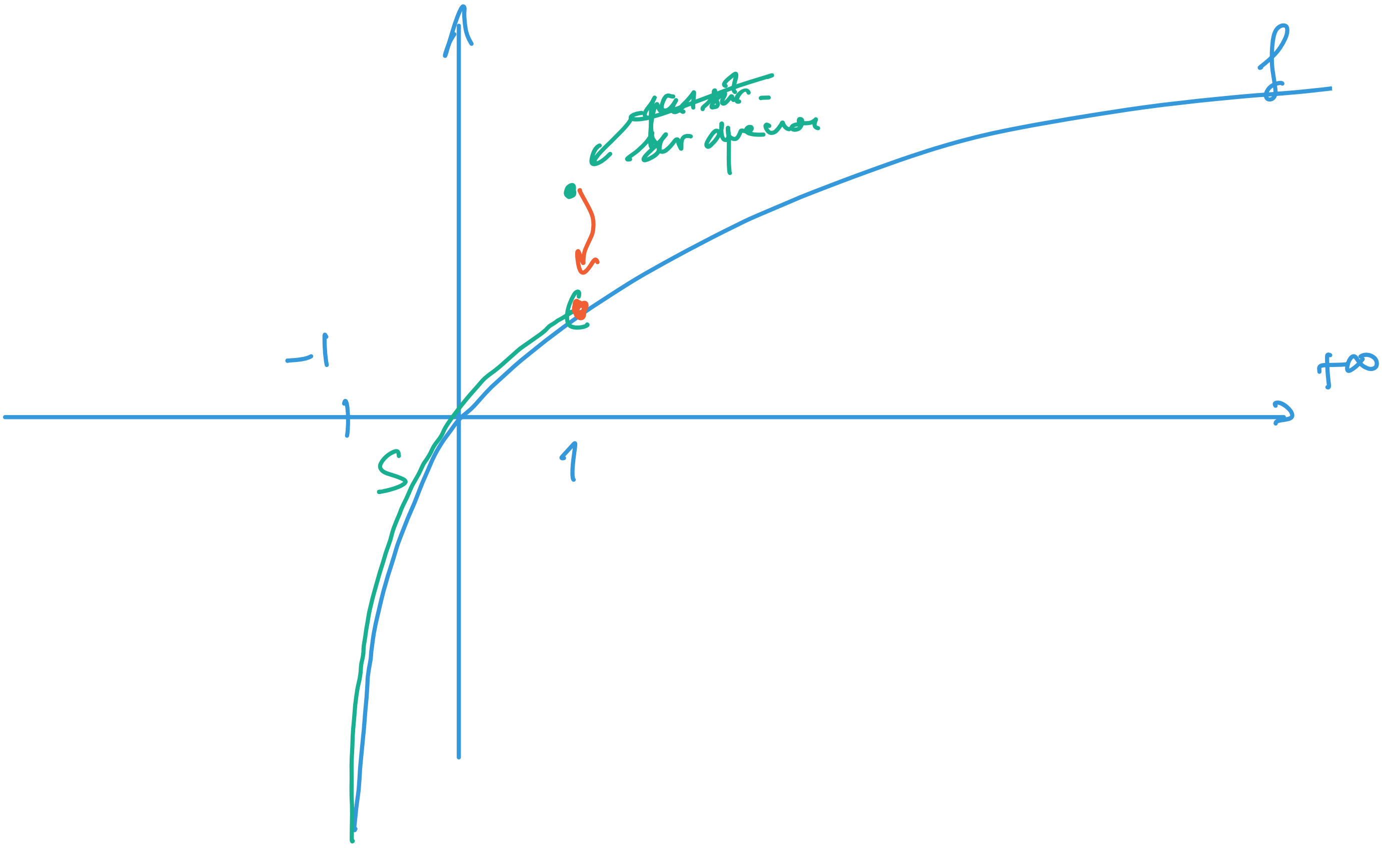
Soit $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ définie sur $]-1, +\infty[$

$R = 1$ $\quad \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ $\quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

$\forall x \in \cancel{]-1, 1[}$

$]-1, 1]$

On a vu : $\forall x \in]-1, 1[$ $\quad f(x) = S(x)$



$\sum (-1)^{n+1} \frac{1^n}{n}$ cv donc S est continue en 1.

Donc $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est développable en SE,

et $\forall x \in]-1, 1]$ $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

en 1 par Abel radial.

Proposition. Si f admet un développement en série entière au voisinage de 0, alors il est unique.

Si $\exists (a_n), (b_n), r_a, r_b$ tq

$\forall x \in]-r_a, r_a[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$\forall x \in]-r_b, r_b[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

alors $\forall x \in]-r, r[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

$r = \min(r_a, r_b)$

$\longrightarrow a_n = b_n \; \forall n$

Proposition. Soit f une fonction qui admet un développement en série entière $\sum a_n x^n$ au voisinage de 0.

- Si f est paire, son développement en série entière est pair : $\forall p,\ a_{2p+1} = 0$.
- Si f est impaire, son développement en série entière est impair : $\forall p,\ a_{2p} = 0$.

Preuve: On suppose $\exists (a_n)_n, r > 0$

$\forall x \in]-r, r[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$\qquad \qquad \qquad \quad \| $

$\qquad \qquad \qquad f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n$

donc par unicité des coeff d'une SE

$\forall n \in \mathbb{N} \quad (-1)^n a_n = a_n$

ie $\forall n$ impair, $a_n = 0$

4.2 Série de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0. On suppose f de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On appelle **série de Taylor de** f la série entière :

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Là où il y a cv, on note $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Proposition. Si f admet un développement en série entière sur $]-r, r[$, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et elle coïncide sur $]-r, r[$ avec la somme de sa série de Taylor :

$$\forall x \in\,]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Remarque. *Attention ! Une fonction peut être $\mathcal{C}^\infty$ sans admettre de développement en série entière.*
Attention ! Une fonction peut admettre une série de Taylor convergente, sans pour autant coïncider avec la somme de cette série.

Preuve : On suppose que f admet un DSE

donc $\exists (a_n)_n,\ r>0$ tq

$$\forall x \in]-r,r[\quad f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}_{S(x)}$$

défini sur $]-R,R[$

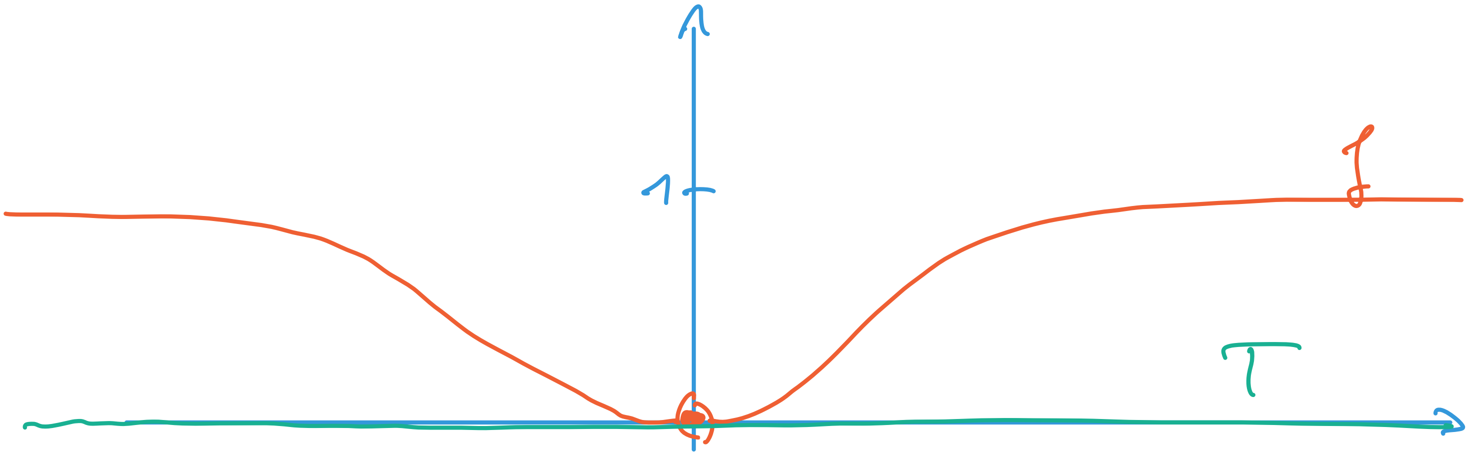
On a vu hier : S est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$

$$\text{et } \forall n \quad a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

car S et f coïncident sur $]-r,r[$

Donc $S(x) = T(x)$

Exemple. La fonction $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & e^{-\frac{1}{x^2}} \end{array}$ prolongée par continuité en 0 admet-elle un développement en série entière au voisinage de 0 ?



$f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ on la prolonge par continuité en posant $f(0)=0$

Th limite de la dérivée

$\to$ f est $\mathcal{C}^k$ $\forall k$ et $f^{(k)}(0)=0$

cf ex à rédiger

et $\forall x \neq 0$ $f^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$

$$T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0}{n!} x^n$$

SE où $a_n = 0$ $\forall n$

de rayon de cv $+\infty$

Donc ici, f est $\mathcal{C}^\infty$ et n'est pas développable en SE.

4.3 Pour montrer qu'une fonction admet un développement en série entière en 0

4.3.1 Opérations sur les fonctions développables en séries entières

Proposition.

- Si f et g admettent des DSE qui sont respectivement $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$, alors $\lambda f + \mu g$ admet un DSE qui est :
$$\sum(\lambda a_n + \mu b_n)x^n$$
Le rayon de convergence a été précisé précédemment.
- Si f et g admettent des DSE qui sont respectivement $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$, alors fg admet un DSE qui est le produit de Cauchy des DSE de f et g :
$$\left(\sum a_n x^n\right)\left(\sum b_n x^n\right)$$
Le rayon de convergence a été précisé précédemment.
- Si f admet un DSE qui est $\sum a_n x^n$, alors f est dérivable, f' admet un DSE qui est :
$$\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$$
Les rayons de convergences sont égaux.
- Si f admet un DSE qui est $\sum a_n x^n$, alors les primitives de f admettent un DSE qui sont :
$$K + \sum \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$
Les rayons de convergences sont égaux.

$\forall x \in]-1, 1[\qquad \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{f(x)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n}_{S(x)} \qquad R=1$

par dérivation $\qquad \underbrace{\frac{1}{(1-x)^2}}_{f'(x)} = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}}_{S'(x)} \qquad R=1$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$$

$\forall x \in]-1, 1[\qquad \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{f(x)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n}_{S(x)} \qquad R=1$

par primitivation : $\qquad -\ln(1-x) = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad R=1$

$$f(x) \overset{?}{=} T(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

4.3.2 Utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral

Rappel : formule de Taylor avec reste intégral. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant 0, alors pour $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}_{R_n(x)}$$

Proposition. Avec les notations précédentes, pour f de classe $\mathcal{C}^\infty$, f admet un DSE(0) si et seulement si $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ sur un voisinage (non vide) de 0.

Remarque. *C'est un résultat plutôt théorique. Même si on l'utilise dans l'exemple suivant, l'utilisation du formulaire du § 4.3.4 est plus efficace, comme c'est le cas dans la recherche de développements limités.*

Exemple. Montrer que la fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

C'est une CV simple.

exp est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k$, $\exp^{(k)} = \exp$

Donc, par la f^le de Taylor avec reste intégral :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt}_{R_n(x)}$$

1^er cas : $x > 0$ fixé

$$|R_n(x)| \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt$$

$$\leq e^x \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

$$= e^x \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x$$

$$= e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

2e cas $x<0$ fixé $x=-y$

$$|R_n(x)| = \left| \int_0^{-y} \frac{(-y-t)^n}{n!} e^t \, dt \right|$$

$$\leq \int_{-y}^{0} \left| \frac{(-y-t)^n}{n!} \right| e^t \, dt$$

$$= \int_{-y}^{0} \frac{(y+t)^n}{n!} e^t \, dt$$

$$\leq 1 \int_{-y}^{0} \frac{(y+t)^n}{n!} \, dt$$

$$= \left[\frac{(y+t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_{-y}^{0}$$

$$= \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ccl : exp est développable en SE

et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

4.3.3 Utilisation d'une équation différentielle

Exemple. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, et que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Remarque. *Lorsque α est un entier naturel, la fonction est un polynôme et sont développement en série entière est obtenu par la formule du binôme, et est valable sur $\mathbb{R}$.*

Soit $f(x) = (1+x)^\alpha$ ~~défini sur $\mathbb{R}$ si $\alpha > 0$~~

~~$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ si $\alpha < 0$~~

~~et si $x < -1$~~

défini sur $I \supset]-1,1[$

Rmq : $\alpha = 2 \quad f(x) = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 + 0x^3 + 0x^4 \dots$

$\alpha \in \mathbb{N} \quad f(x) = (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k + 0 x^{\alpha+1} + \dots$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, f est polynomiale donc développable en SE, de rayon $+\infty$.

<u>On suppose $\alpha \notin \mathbb{N}$.</u>

$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = (1+x)^\alpha$

donc $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$

donc f est sol de l'ED

$$(1+x)y' = \alpha y$$

avec cond initiale : $y(0) = 1$

f est LA sol du pb de Cauchy $\begin{cases} (1+x)y' = \alpha y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

- Cherchons les sol développables en SE de cette ED.

<u>Analyse</u> : Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

On suppose $R > 0$

<u>Alors</u> $\forall x \in]-R, R[$ $\quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

"le terme constant disparait"

S sol de l'ED sur $]-R, R[$

$\iff \forall x \in]-R, R[\quad (1+x) S'(x) = \alpha S(x)$

$\iff \forall x \in]-R, R[$

$$(1+x) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$\iff \forall x \in]-R, R[$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$\iff \forall x \in]-R, R[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=\cancel{1}\,0}^{+\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n x^n$$

$\iff \forall x \in]-R, R[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+1) a_{n+1} + (n-\alpha) a_n \right] x^n = 0$$

$\iff \forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1) a_{n+1} + (n-\alpha) a_n = 0$

par unicité des coeff.

$\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \dfrac{(\alpha - n)}{(n+1)} a_n$

réc $\forall n$

$\Leftrightarrow \quad a_n = \dfrac{(\alpha - n+1)}{n} \dfrac{(\alpha - n+2)}{n-1} \cdots \times \dfrac{(\alpha-1)}{2} \times \dfrac{\alpha}{1} a_0$

hérédité $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ initialisation

$\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} a_0$

Synthèse. Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} a_0 \, x^n$

rayon de cv ? Règle de d'Alembert :

$$\left| \dfrac{\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}}{\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}} \right| = \left| \dfrac{\alpha - n}{n+1} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

donc $R = \dfrac{1}{1} = 1 > 0$.

Donc S est sol de l'ED sur $]-1, 1[$.

On reprend

Avec $a_0 = 1$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

$R = 1$, on a S sol de $\begin{cases} (x+1)y' = \alpha y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Par unicité de la sol. au pb de Cauchy,

$\forall x \in]-1,1[\quad S(x) = f(x)$

ie $$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Résoudre $(x+1)(x+2)y'' + xy' - y = 0$

4.3.4 Formulaire

Les développements issus de l'exponentielle (Rayon $+\infty$).

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{pour tout } x \in]-\infty, +\infty[$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{2\, n!} x^n$$

0 si n impair

2 si n pair

$$= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} x^{2p}$$

$$\cos(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

Par la f^{la} de Taylor avec reste intégral.

Les développements issus de la série géométrique, de $(1+x)^\alpha$ (Rayon 1).

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \text{pour tout } x \in]-1,1[$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

par primitivation, $R=1$

$$\operatorname{Arctan} x = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}$$

$$\operatorname{Arcsin}(x) = 0 +$$

$$\operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} +$$

Ex Rayon de cv de la SE $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{n!}$

$$R=+\infty \quad \text{car} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = e^{(x^2)}$$

$$\sum a_n x^n \qquad R \qquad S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$f(x) \rightsquigarrow f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$\sum a_n x^n$ est-ce qu'on peut exprimer $S(x)$ avec les fct usuelles ?

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{x^{n+3}}{n} \qquad R = R\left(\sum \frac{x^n}{n} \cancel{x^3}\right) = R\left(\sum x^n\right) = 1$$

$\forall x \in]-1,1[$
$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{n+3}}{n}$$
$$= -x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$
$$= -x^3 \ln(1+x)$$

4.4 Calcul de la somme d'une série entière

Pistes.

- Connaître le formulaire du § 4.3.4 !
- Reconnaître des combinaisons linéaires (parfois aux premiers termes près) de SE du formulaire. produit de Cauchy.
- Reconnaître des dérivées de SE connues. En particulier, pour $|x| < 1$:

$(1-x)^{-1}$
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$-(-1)(1-x)^{-2}$
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$$

$-(-1)-(-2)(1-x)^{-3}$
$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) x^n$$

- Ne pas hésiter à factoriser par x, x^2 ou alors $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ pour $x \neq 0$ pour ajuster le degré de x.
- On peut dériver $S(x)$ en $S'(x)$, $S''(x)$ et faire apparaître une SE connue ou une équation différentielle satisfaite par $S(x)$.
- Si on connaît une relation de récurrence satisfaite par les a_n, on multiplie par x^n et on somme ces relations, pour obtenir une équation fonctionnelle satisfaite par $S(x)$.

Exemple. Déterminer la somme des séries entières suivantes :

$\sum_{n \geqslant 0} n^2 x^n$	$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(n+1)^2}{n} x^n$	$\sum_{n \geqslant 0} \frac{(n+1)}{n!} x^n$
$\sum_{n \geqslant 0} \frac{(n+1)}{(n+2)n!} x^n$	$\sum_{n \geqslant 0} (2^n + 3^n) x^n$	$\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ où $a_{n+1} = 2a_n$

$\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$
où $a_{n+1} = 2a_n$

~~On verra ce qu'est R après.~~ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$ donc $R = \frac{1}{2}$

$\forall x \in]-\cancel{R}\frac{1}{2}, \cancel{R}\frac{1}{2}[\qquad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

On a : $\forall n \qquad a_{n+1} = 2 a_n$

$\forall n \ \forall x \qquad a_{n+1} x^{n+1} = 2 a_n x^{n+1}$

en sommant : $\forall x \in]-R, R[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = S(x) - a_0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^{n+1} = 2x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2x\, S(x)$$

donc $S(x) - a_0 = 2x\, S(x)$ $\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

ie $S(x) = \dfrac{a_0}{1-2x}$

Rmq: On pourrait aussi exprimer a_n en fct de n :

$a_n = a_0\, 2^n$.

Donc $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_0 2^n x^n$ cv ssi $|2x| < 1$

$= a_0 \cdot \dfrac{1}{1-2x}$ série géom.

Exemple. Déterminer la somme des séries e

$$\sum_{n\geqslant 0} n\ x^n \qquad R = 1 \qquad (R(\sum n^\alpha x^n) = 1)$$

On connaît $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$ $\forall x \in]-1, 1[$

en dérivant $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

Donc $\forall x \in]-1, 1[$ $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}$$

Exemple. Déterminer la somme des séries e

$$\sum_{n\geqslant 0} n^2 x^n$$

$R = 1$

On connait $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}$

En dérivant $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$

$$\underset{\displaystyle \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)\, x^n}{\parallel}$$

$\forall x \in \,]-1,1[\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big((n+2)(n+1) - 3(n+1) + 1 \Big) x^n$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)\, x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

(3 séries de rayon 1)

$$= \frac{2}{(1-x)^3} - 3\,\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)}$$

$$S(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)}{(n+2)n!} x^n \qquad \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n!}$$

donc $R \geqslant R\left(\sum \frac{x^n}{n!}\right) = +\infty$

• $\forall x \in \mathbb{R}$ $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{(n+2)\, n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!} x^n$

$$(n+1)^2 = \alpha(n+2)(n+1) + \beta(n+2) + \gamma 1$$

$$(n+1)^2 = (n+2)(n+1) - (n+2) + 1$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1) - (n+2) + 1}{(n+2)!} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} \right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$$

(3 séries de rayon $+\infty$)

Pour $x \neq 0$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

$$= e^x - \frac{1}{x}\left(e^x - 1\right) + \frac{1}{x^2}\left(e^x - 1 - x\right)$$

Pour $x = 0$ $S(0) = \frac{1}{2}$

$\underline{\text{Cl}}$: $\forall x \in \mathbb{R} \quad S(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x = 0 \\ e^x - \frac{1}{x}(e^x - 1) + \frac{1}{x^2}(e^x - 1 - x) & \text{sinon.} \end{cases}$

est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

Car somme de SE de rayon $+\infty$.

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+1)^2}{n} x^n$$

$R = R\left(\sum n x^n\right)$ par équivalent : $\frac{(n+1)^2}{n} \sim n$

$= 1$

$\forall x \in]-1, 1[\quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n + 2 + \frac{1}{n}\right) x^n$

$= x \sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

(3 séries de rayon 1)

$= x \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

$= x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + 2 \cdot \frac{x}{1-x} - \ln(1-x)$

$$\sum_{n\geqslant 0} (2^n + 3^n) x^n$$

$\sum 2^n x^n$ a pour rayon $\frac{1}{2}$

$\sum 3^n x^n$ ——— $\frac{1}{3}$

Par addition, rayons différents donc $R = \frac{1}{3}$

$\forall x \in \left] -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2^n + 3^n)\, x^n = \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x}$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)}{n!} x^n$$

$$\frac{n+1}{n!} \sim \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

donc $R = R\left(\sum \frac{x^n}{(n-1)!}\right) = +\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$\frac{n}{n!} \neq \frac{1}{(n-1)!}$ quand $n=0$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= x e^x + e^x$$

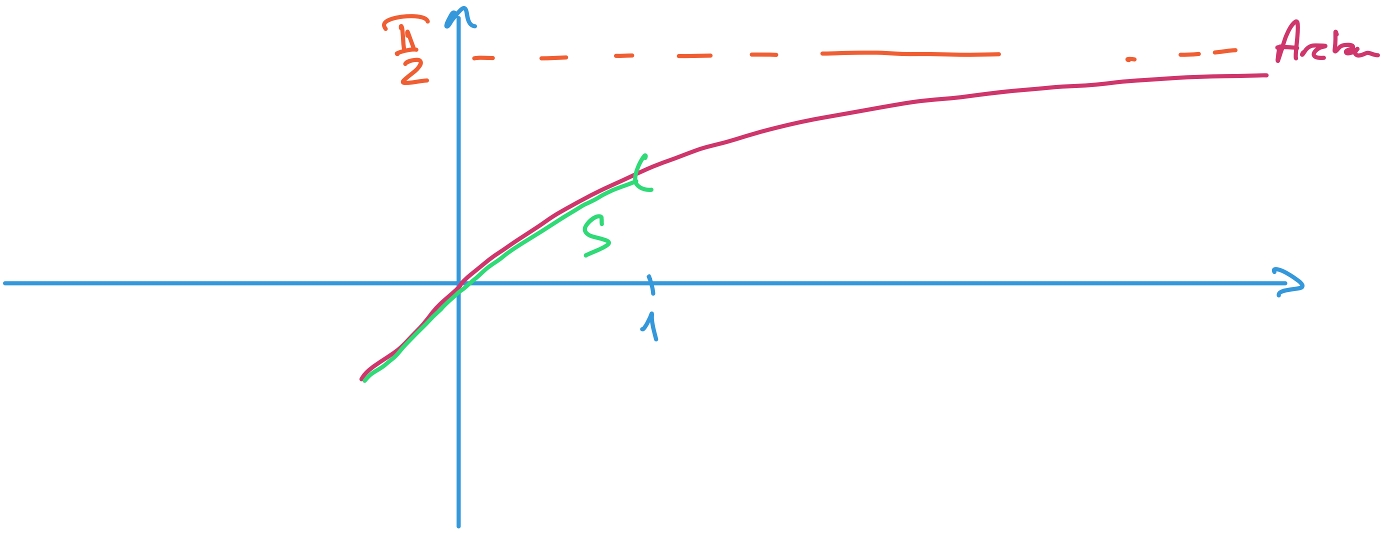
$$= (x+1) e^x.$$

Exemple : Que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$?

Notons $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1}$ de rayon 1

$\forall x \in]-1,1[$

On sait que $\forall x \in]-1,1[\quad S(x) = \text{Arctan}(x)$



On cherche $S(1)$

Par le th d'Abel radial :

- $\sum (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ cv (th des séries alternées)
- $\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ de rayon 1

donc $S(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} S(1)$

(autrement dit : S est continue en 1 à gauche)

Donc $\forall x \in\,]-1,1[\quad S(x) = \text{Arctan}\, x$

$$S(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} S(1) \qquad \text{Arctan}\, x \xrightarrow[x \to 1^-]{} \text{Arctan}\, 1$$

Donc $S(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

M2 $\quad S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1}$ continue en 1 ?

<u>Mque la cv est uniforme sur $[0,1]$:</u>

$$\left\| x \longmapsto \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \right\|_\infty^{[0,1]} = \frac{1}{2n+1}$$ zut...

à x fixé, $\left(\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)_n$ positive décroissante de limite nulle

donc par le th des séries alternées

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right|$$

$$\leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

$$\leq \frac{1}{2n+3}$$ indép de x $\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Par transfert de continuité, S est continue sur $[0,1]$.