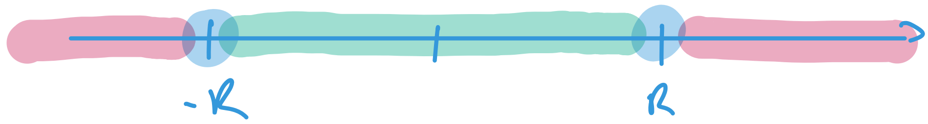
Pour jé : 55.10, 55.18, 55.20, 55.31

$\sum a_n x^n$, R



2 Opérations sur les séries entières

2.1 Loi externe

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Pour $\lambda \neq 0$, $\sum \lambda a_n z^n$ a pour rayon de convergence R et, pour tout z tel que $|z| < R$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Si $\lambda = 0$, $\sum 0 z^n$ a pour rayon $+\infty$

et somme 0.

2.2 Somme de deux séries entières

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs.

- Si $R_a < R_b$ alors $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = R_a < R_b$
- Si $R_a = R_b$ alors le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geqslant R_a = R_b$

Dans tous les cas, pour $|z| < \mathrm{Min}(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Preuve : pour $|z| < \mathrm{Min}(R_a, R_b)$

alors $\sum a_n z^n$ cv absolument

$\sum b_n z^n$ cv absolument

donc converge et par somme,

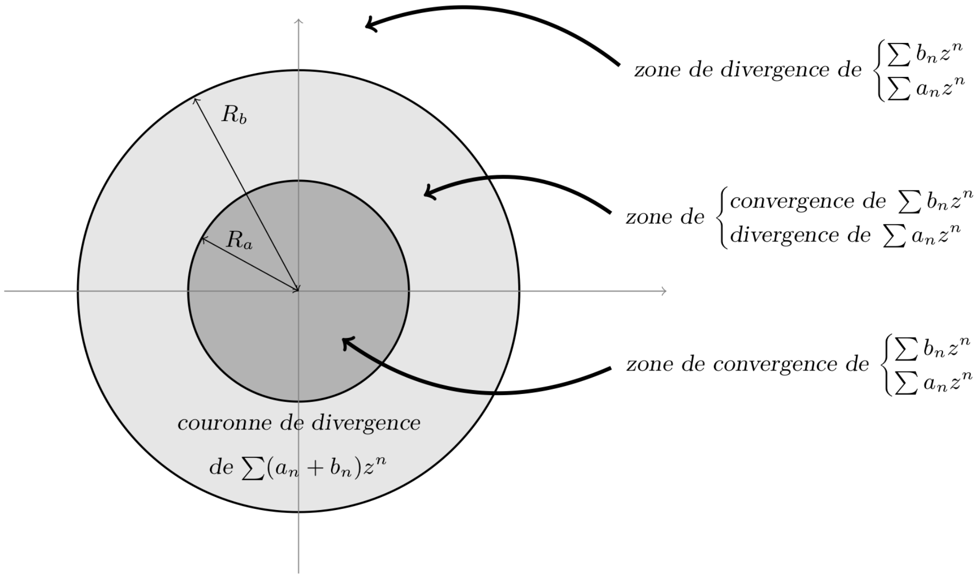
$\sum (a_n z^n + b_n z^n)$ converge donc $R \geqslant |z|$

pour tout $|z| < \min(R_a, R_b)$

donc $R \geqslant \min(R_a, R_b)$

et $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n+b_n) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$

Interprétation graphique lorsque $R_a < R_b$.



Si $R_a < R_b$, on prend z tq $R_a < |z| < R_b$

alors $\sum a_n z^n$ div grossi

$\sum b_n z^n$ cv (abs)

donc $\sum (a_n+b_n) z^n$ diverge

donc $R \leq |z|$ vrai $\forall |z| > R_a$

donc $R \leq R_a$

2.3 Produit de Cauchy

Définition. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. On définit leur **produit de Cauchy** comme étant la série entière $\sum c_n z^n$ où :

$$\forall n,\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Remarque. *Cela correspond, à z fixé, au produit de Cauchy des séries numériques.*

Proposition. Soit R_a et R_b les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, et R_c le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$ leur produit de Cauchy. Alors :

$$R_c \geqslant \mathrm{Min}(R_a, R_b)$$

et pour tout $|z| < \mathrm{Min}(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

Exemple. Effectuer le produit de Cauchy de $\sum z^n$ avec elle-même.

Remarque : Si les séries sont indexées à partir de 1 (ou 2...)

on ajoute $a_0 = 0$, ($a_1 = 0$...)

Preuve : Soit $|z| < \mathrm{Min}(R_a, R_b)$

Alors les séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$

cv absolument donc $\sum c_n z^n$ cv absolument (sommabilité)

et $$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

$$c_n z^n = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (a_k z^k)(b_{n-k} z^{k})$$

donc $|z| \leq R$ $\forall |z| < \mathrm{Min}(R_a, R_b)$

donc $\mathrm{Min}(R_a, R_b) \leq R$

Exemple. Effectuer le produit de Cauchy de $\sum z^n$ avec elle-même.

- On note $a_n = b_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Le produit de Cauchy de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$

et $\sum c_n z^n$

où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

$= (n+1)$

Le produit de Cauchy est $\sum (n+1) z^n$

- $R_a = R_b = 1$

donc $R\left(\sum (n+1) z^n\right) \geq 1$

(on sait que $R\left(\sum (n+1) z^n\right) = R\left(\sum n z^n\right)$

car $(n+1) \sim n$

$= R\left(\sum z^n\right)$

$= 1$)

et $\forall |z| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{1-z}\right)^2$$

par glissement d'indice : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$ $\forall |z| < 1$

3 Régularité de la somme

3.1 Mode de convergence des séries entières réelles

On s'intéresse à une série entière de variable réelle $\sum a_n x^n$ et on note R son rayon de convergence.

Remarque. *On a déjà dit la convergence simple sur l'intervalle ouvert de convergence* $]-R, R[$.

Théorème.

$\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment $[-a, a] \subset]-R, R[$.

On dispose plus généralement du résultat suivant :

Proposition. $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence.

Preuve : Soit b tq $[-b, b] \subset]-R, R[$

$\forall x \in [-b, b]$

$|a_n x^n| \leq |a_n| b^n$ indép de x

c'est le t.g d'une série cv car $b \in]-R, R[$

donc $\sum a_n x^n$ cv normalement sur $[-b, b]$.

donc cv uniformément sur $[-b, b]$.

Rmq. Attention !

En général, pas cv normale, pas cv uniforme sur $[-R, R]$ ou $]-R, R[$.

Exemple. Déterminer les domaines de convergence simple, uniforme, normale pour :

$$\sum x^n, \sum \frac{x^n}{n}, \sum \frac{x^n}{n^2}$$

- $\sum x^n$: $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

  * cv simplement ssi $|x|<1$ cv sur $]-1,1[$

  * cv normalement / uniformément sur tout $[-a,a] \subset]-1,1[$

  * cv normale sur $]-1,1[$?

    $$\| x \mapsto x^n \|_\infty^{]-1,1[} = \sup \left(|x^n|, x \in]-1,1[\right)$$

    $$= 1 \quad \text{tg série div.}$$

    donc pas C.N sur $]-1,1[$

  * cv uniforme sur $]-1,1[$?

    Si la cv est uniforme,

    $$x^n \xrightarrow[x \to 1^-]{} 1 \quad (\text{à } n \text{ fixé})$$

    donc, par double limite :

    $$\sum_{n \geq 0} 1 \text{ converge} \quad (\text{absurde})$$

- $\sum_{n>0} \frac{x^n}{n}$:

  * $R = 1$ donc il y a cv simple sur $]-1, 1[$

    étude en 1 : $\sum \frac{1}{n}$ div (harmonique)

    étude en -1 : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ cv (harmonique alternée)

    donc la cv simple est sur $[-1, 1[$

  * cv normale : sur tout $[-a, a] \subset]-1, 1[$

    cv uniforme : sur tout $[-a, a] \subset]-1, 1[$

  * cv normale sur $]-1, 1[$?

    $$\left\| x \longmapsto \frac{x^n}{n} \right\|_\infty^{]-1,1[} = \frac{1}{n}$$

    et $\sum \frac{1}{n}$ diverge

    donc pas cv normale sur $]-1, 1[$

  * cv uniforme :

    - S'il y a cv uniforme sur $[0, 1[$,

      comme $\frac{x^n}{n} \xrightarrow[x \to 1^-]{} \frac{1}{n} = \ell_n$

      par double limite,

      $\sum \ell_n$ cv. Absurde.

    - cv unif sur $[-1, 0[$? $x = -t$

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \right|$$

$$|R_n(-t)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^k}{k} \right|$$

à t fixé $\left(\frac{t^n}{n}\right)_n$ positive, décroissante de limite nulle

par le th des séries alternées :

$$|R_n(-t)| \leq \left| \frac{t^{n+1}}{n+1} \right|$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \quad \text{indép de } t$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

donc la cv est unif sur $[-1, 0[$

<u>Ccl</u> : la série cv uniformément sur tout $[-1, a[$ où $a < 1$

- $\sum \frac{x^n}{n^2}$ $\quad R = 1$

* cv simple sur $]-1, 1[$

en 1, $\sum \frac{1}{n^2}$ cv

en -1 $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ cv absolument donc cv unif sur $[-1, 1]$

$\ast \ \left\| x \longmapsto \frac{x^n}{n^2} \right\|_\infty^{[-1,1]} = \frac{1}{n^2}$

tq série cv

Donc $\sum \frac{x^n}{n^2}$ cv normalement uniformément sur $[-1, 1]$.

3.2 Continuité de la somme des séries entières

Théorème.

> Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
> Sa somme S $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

Preuve. On note $f_n(x) = a_n x^n$.

$\forall [-b, b] \subset]-R, R[$,

+ les f_n sont continues sur $[-b, b]$

+ $\sum f_n$ cv normalement, donc unif sur $[-b, b]$

Donc par transfert de continuité,

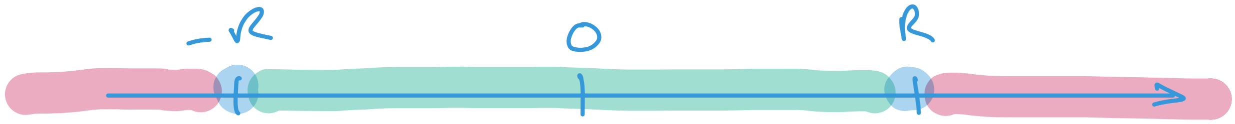
S est continue sur tout $[-b, b] \subset]-R, R[$

donc sur $]-R, R[$.

On dispose plus généralement du résultat suivant :

Proposition. Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de variable complexe, de rayon de convergence R, alors sa somme est continue sur le disque ouvert de convergence.

Preuve. Résultat admis. □



3.3 Résultat au bord de l'intervalle de convergence pour la somme des séries entières réelles

Remarque. *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.*

- *Si $R = +\infty$, on sait déjà que sa somme $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.*
- *Si $R < +\infty$ et si $\sum |a_n| R^n$ converge, alors sa somme $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle $[-R, R]$.*

Théorème d'Abel radial.

> Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$.
> Si la série numérique $\sum a_n R^n$ converge, alors :
> $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \overset{<}{\to} R]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

Corollaire. Si $\sum a_n$ converge, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \overset{<}{\to} 1]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Remarque : Si $\sum a_n R^n$ cv absolument (par ex, si $a_n > 0$) il y a cv normale de $\sum a_n x^n$ sur $[-R, R]$ donc transfert de continuité sur $[-R, R]$.

3.4 Primitives/intégrales de la somme des séries entières réelles

Proposition. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Pour tout $[a,b] \subset]-R,R[$:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \int_a^b t^n \, \mathrm{d}t\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

segment $\subset]-R,R[$ ouvert

On ne touche pas le bord !

CV uniforme sur le segment $[a,b] \subset]-R,R[$

Corollaire. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Une primitive de sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R,R[$ est :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

qui est obtenue par primitivation terme à terme. Son rayon est R.

$]-R,R[$

$x \longmapsto \int_0^x S(t)\,dt$ est une primitive de S sur $]-R,R[$

$\forall x \in]-R,R[$, $\quad [0,x] \subset]-R,R[$

donc $$\int_0^x S(t)\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \,dt$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^x t^n \,dt$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Rmq : $R\left(\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\right) = R\left(\sum a_n x^n\right)$

Exemple. Primitiver $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

$R=1$. On note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \forall x \in]-1,1[$.

La primitive de S qui s'annule en 0 est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Rédaction : $\forall x \in]-1,1[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

donc, par primitivation

$$0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$$

On a donc : $\forall x \in]-1,1[\quad -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

On a donc $\begin{cases} \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \forall x \in]-1,1[\\ R=1 \end{cases}$

On peut faire mieux ?

C'est aussi vrai en 1 $\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$?

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \ln(1+x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}}_{S(x)}$$

Et si $x \xrightarrow{<} 1$?

- $\ln(1+x) \xrightarrow[x \to 1, <]{} \ln(2)$ par continuité
- $S(x) \xrightarrow[x \to 1, <]{} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

par le Th d'Abel radial,
avec $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ cv
comme série harmonique alternée.

Par unicité de la limite, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2$

3.5 Dérivabilité de la somme des séries entières réelles

Théorème.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

De plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Remarque : le rayon de cv de la série dérivée est le même, mais le domaine de cv peut changer.

$$R\left(\sum n a_n x^{n-1}\right) = R\left(\sum a_n x^{n-1}\right)$$
$$= R\left(\sum a_n x^n\right)$$

Preuve Soit $f_n(x) = a_n x^n \quad \forall x \in]-R, R[$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

* $\sum f_n$ cv simplement sur $]-R, R[$
* Chaque f_n est $\mathcal{C}^1$ et $f_n'(x) = n a_n x^{n-1} \; \forall n \geq 1$
* $\sum f_n'$ est une série entière

$\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ de rayon R

donc cv normalement, donc uniformément, sur tout $[-a, a] \subset]-R, R[$.

Donc $\sum f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur tout $[-a, a] \subset]-R, R[$

donc sur $]-R, R[$ et $\forall x \in]-R, R[$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Corollaire. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

De plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} S^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+k)(n+k-1)\dots(n+1)a_{n+k}x^n \end{aligned}$$

$\forall x \in]-R, R[$

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 \dots$$

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 + \dots$$

$$S''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \dots$$

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^n) = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

Exemple. On considère $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ et en déduire l'expression de $f(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc le rayon de cv de cette série entière est $+\infty$.

Donc f est définie sur $]-\infty, +\infty[$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, +\infty[$

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\, x^{n-1}}{n!}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= f(x)$$

Donc $f(x)$ est sol de l'ED $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Exemple. Montrer que $g : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

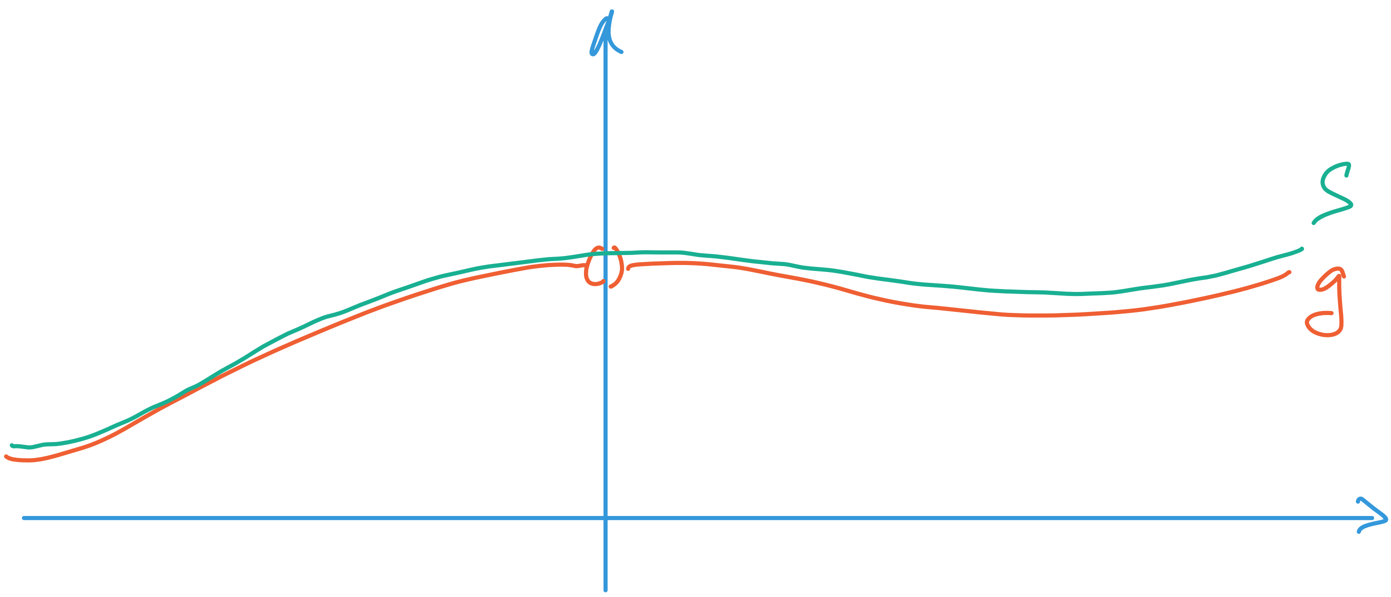
$$g(x) = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

Notons $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ somme de SE de rayon de cv $+\infty$



S somme de SE de rayon $+\infty$ donc S est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

Donc g se prolonge en 0 en une fct $\mathcal{C}^\infty$.

$\forall x \in]-1,1[$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + o(x^4)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^N)$$

Proposition. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et S sa somme.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Preuve: $\forall x \in]-R, R[\quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$\forall k$

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

en part : $S^{(k)}(0) = \text{coeff constant}$

$$= a_k \frac{k!}{0!}$$

donc $\quad a_k = \dfrac{S^{(k)}(0)}{k!}$

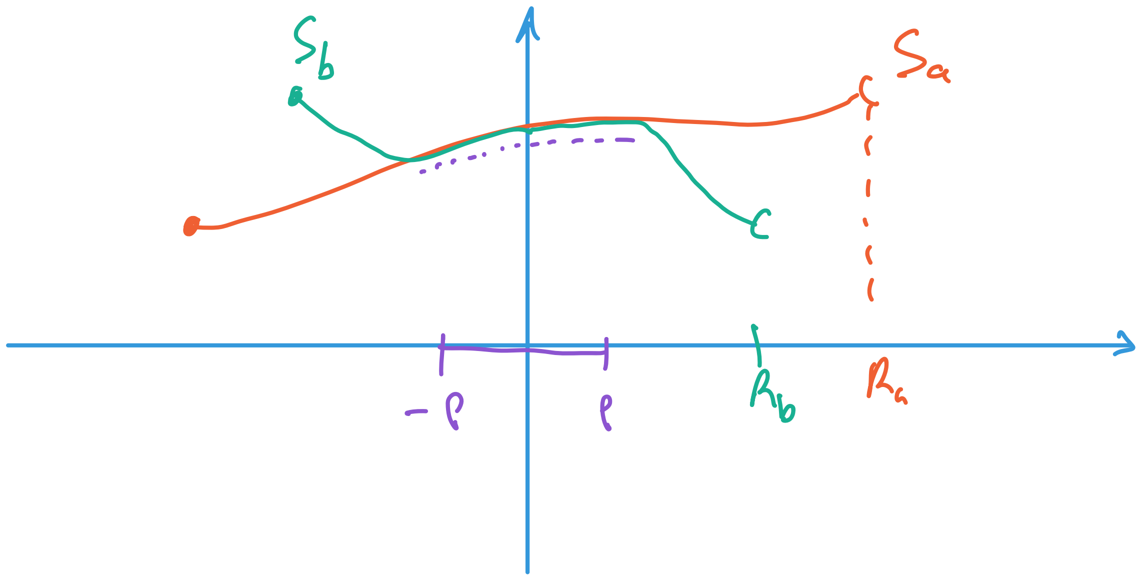
Corollaire (Unicité des coefficients d'une série entière). Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b. On suppose que leurs sommes coïncident sur un intervalle ouvert non vide :

$$\exists \rho,\ 0 < \rho < \mathrm{Min}(R_a, R_b) \text{ t.q. } \forall t \in]-\rho, \rho[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

ou: $[0, \rho[$

Alors les séries entières sont identiques :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$$



$\forall n,\quad S_b^{(n)}(0) = S_a^{(n)}(0)$

car S_a et S_b coïncident autour de 0

donc $a_n = b_n$