Pour dimanche soir : au moins 1 ex à rédiger 66.28, 66.29
53.41, 53.42
54.40, 54.41

Séries entières

$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ série de fct $\cancel{\sum (-1)^n = \frac{1}{2}}$

$\sum x^n = \frac{1}{1-x}$ $|x| < 1$ $]-1,1[$

1 Rayon de convergence

1.1 Définitions

Définition. On appelle **série entière** toute série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe a_n tel que $f_n : x \mapsto a_n x^n$.

Remarque. *Les a_n déterminent complètement la série entière.*
Lorsque $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ n'est définie qu'à partir d'un certain rang, on convient que les premiers termes sont nuls, et on note $\sum\limits_{n\geqslant n_0} a_n x^n$ la série entière associée.

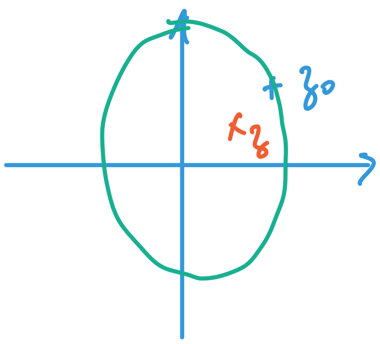
Convention. Lorsque la variable est réelle, on la note x et $\sum a_n x^n$ est la **série entière de variable réelle** x.
Lorsque la variable est complexe, on la note z et $\sum a_n z^n$ est la **série entière de variable complexe** z.

1.2 Convergence d'une série entière

Lemme d'Abel.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée.
Alors, pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Remarque. *Ainsi, si $(a_n z_0^n)_n$ est bornée, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument sur le disque ouvert $D(O, |z_0|)$.*



Preuve: Soit z tq $|z| < |z_0|$

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| . \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

$$= O(1) \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

$$= O\left(\left|\frac{z}{z_0}\right|^n\right)$$

tq série géom convergente

donc $\sum a_n z^n$ cv absolument.

Définition. On appelle **rayon de convergence** d'une série entière la quantité :

$$R = \text{Sup}\,\underbrace{\{\rho \in \mathbb{R}_+ \text{ t.q. } (a_n \rho^n)_n \text{ est bornée}\}}_{E} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

E partie de $\mathbb{R}$, non vide (contient 0)

si E majorée, E admet une borne sup dans $\mathbb{R}$.

si E non majorée, $\text{Sup}(E) = +\infty$

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et R son rayon de convergence. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a :

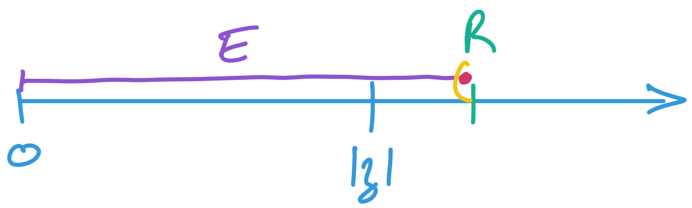
- Si $|z| < R$, alors $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$, alors $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée et $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.
- Si $|z| = R$, on ne peut rien dire concernant la convergence de $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$

Preuve:

Cas $R < +\infty$

- Soit z tq $|z| < R$

par déf du Sup



$\frac{|z|+R}{2} < R$ donc $\frac{|z|+R}{2}$ n'est pas un majorant de E

donc $\exists \rho \in E$ tq $\frac{|z|+R}{2} \leq \rho$

on a donc $|z| < \rho$ et $(a_n \rho^n)_n$ bornée

donc par le lemme d'Abel, $\sum a_n z^n$ cv abs.

- On suppose $|z| > R$

  donc $|z| \notin E$ donc $(a_n |z|^n)_n$ non bornée

  donc $\sum a_n z^n$ div. grossièrement.

Proposition.

- $R = 0$ si et ssi $\sum a_n z^n$ ne converge que pour $z = 0$.
- $R = +\infty$ si et ssi $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence.

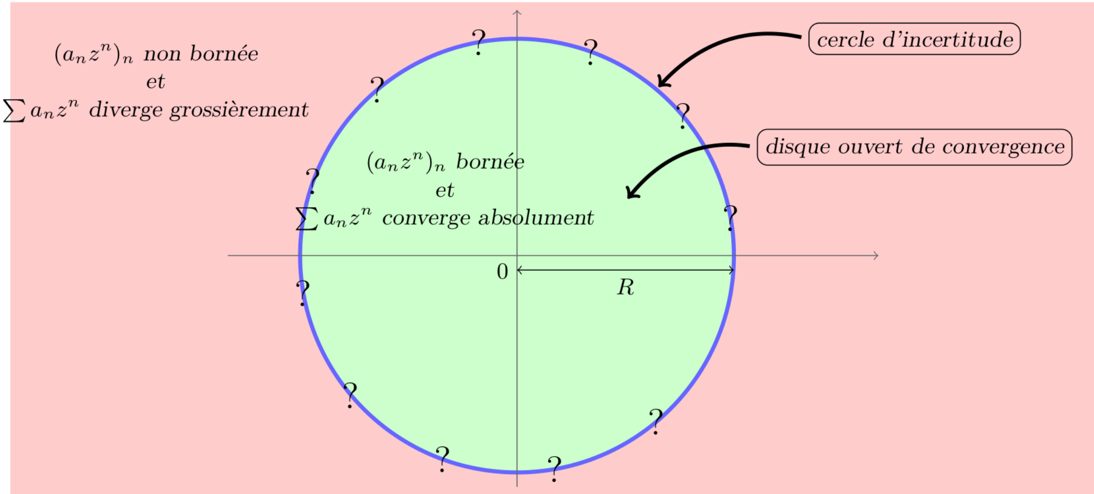
Définition. Pour une série entière complexe de rayon R, on appelle **disque ouvert de convergence** :

$$D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| < R\}$$

et on définit sur $D(0,R)$ la **somme** de la série entière : $S : \begin{array}{rcl} D(0,R) & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array}$

Le cercle $C(0,R)$ s'appelle le **cercle d'incertitude**.

Interprétation graphique dans le cas $\sum a_n z^n$.



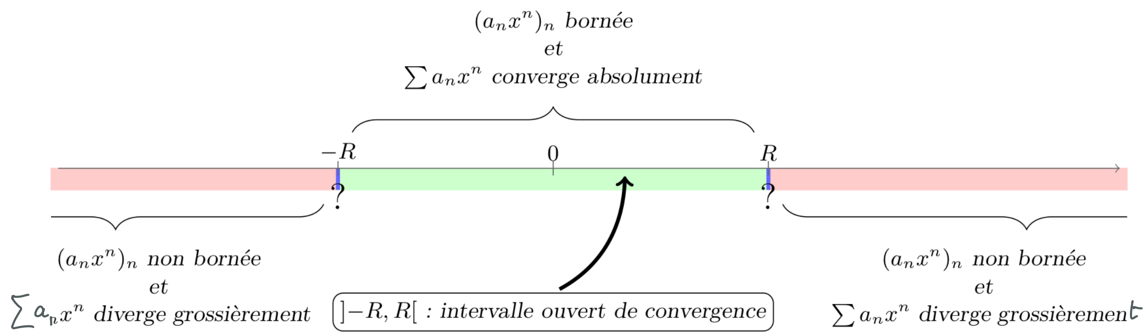
Définition. Pour une série entière réelle de rayon R, on appelle **intervalle ouvert de convergence** :

$$]-R, R[= \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } |x| < R\}$$

et on définit sur $]-R, R[$ la **somme** de la série entière :

$$S : \begin{array}{rcl}]-R, R[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$$

Interprétation graphique dans le cas $\sum a_n x^n$.



Remarque. *L'étude de la convergence sur le cercle d'incertitude n'est pas un objectif du programme. Précisons tout de même que, si on note D le domaine de convergence de $\sum a_n z^n$, on a :*

$$D(0, R) \subset D \subset \overline{D(0, R)}$$

Exemple. Étudier la convergence en $z = 1$ et $z = -1$ des séries entières suivantes :

$$\sum z^n \qquad \sum \frac{z^n}{n} \qquad \sum \frac{z^n}{n^2}$$

Quels sont les rayons de convergence de ces trois séries entières ?

$\sum z^n$

- pour $z=1$ et pour $z=-1$ divergence grossière de $\sum a_n z^n$

donc $R \leq 1$

- quel est R ?

idée 1 : $E = \{ \rho \geq 0 \mid (\rho^n)_n \text{ bornée} \}$

$= [0, 1]$

donc $R = \sup E = 1$

idée 2 : $\sum z^n$ cv $\iff |z| < 1$

pour $|z| < 1$, $\sum z^n$ cv abs

donc $\forall |z| < 1 \quad |z| \leq R$

donc $1 \leq R$

Ainsi $R = 1$.

$\sum \frac{z^n}{n}$

- Pour $z = 1$, $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $R \leq 1$

$\left\{ \begin{array}{l} \sum \frac{1}{n} \text{ ne div pas grossièrement} \\ \text{ou} \\ \left(\frac{1}{n}\right)_n \text{ est bornée.} \end{array} \right.$ donc $R \geq 1$

- Pour $z=-1$, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge $R \geq 1$

mais cv pas absolument $R \leq 1$

$$\sum \frac{z^n}{n^2}$$

- Pour $z=1$ ou $z=-1$

$\sum \frac{z^n}{n^2}$ cv absolument

donc $R \geq 1$

- $\frac{\rho^n}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \quad \forall \rho > 1$

donc $R \leq \rho \quad \forall \rho > 1$

donc $R \leq 1$

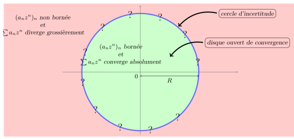
1.3 Détermination pratique du rayon de convergence

1.3.1 Quelques situations fréquentes

La connaissance de la convergence pour certaines valeurs de z nous renseigne souvent suffisamment pour déduire la valeur de R. Précisons :

Proposition.

- Si pour un $z_0 \in \mathbb{C}$, $\sum a_n z_0^n$ est convergente, alors $z_0 \in \overline{D(0,R)}$ i.e. $R \geqslant |z_0|$.
- Si pour un $z_0 \in \mathbb{C}^*$, $\sum a_n z_0^n$ n'est pas absolument convergente, alors $z_0 \notin D(0,R)$ i.e. $R \leqslant |z_0|$.
- Si pour un $z_0 \in \mathbb{C}$, $\sum a_n z_0^n$ est semi-convergente, alors $z_0 \in C(0,R)$ i.e. $R = |z_0|$.



Remarque. *En pratique, on applique souvent la proposition précédente avec z_0 réel.*

Exemple. On note a_n le n-ième chiffre de l'écriture décimale de $\sqrt{2}$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ donc $(a_n)_n$ n'est pas nulle à partir d'un certain rang.

  donc $a_n \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$

  donc $\sum a_n 1^n$ div grossièrement

  donc $R \leq 1$

- $(a_n)_n$ est bornée ($a_n \in [\![0,9]\!]$)

  donc $(a_n 1^n)_n$ est bornée

  donc $1 \in E$ donc $1 \leq R$

Proposition. $\rho \in E$

- Si pour un $\rho > 0$, $(a_n \rho^n)_n$ est bornée, alors $R \geqslant \rho$.
- Si pour un $\rho > 0$, $(a_n \rho^n)_n$ n'est pas bornée, alors $R \leqslant \rho$

1.3.2 Comparaison asymptotique et rayon de convergence

Exemple de référence. On a :

$$R\left(\sum n^\alpha x^n\right) = 1$$

Preuve :

- Si $|x| > 1$, $n^\alpha |x|^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

  (même si $\alpha < 0$)

  donc $(n^\alpha |x|^n)_n$ non bornée

  donc $R \leq |x|$

  Ceci est vrai $\forall |x| > 1$

  donc $R \leq 1$

- Si $|x| < 1$, $n^\alpha |x|^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

  (même si $\alpha > 0$)

  donc $(n^\alpha |x|^n)_n$ est bornée

  donc $|x| \in E$

  donc $|x| \leq R$

  Ceci est vrai $\forall |x| < 1$

  donc $1 \leq R$

Ccl : $R = 1$.

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs.

- Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$. ou $a_n = o(b_n)$
- Si, à partir d'un certain rang, $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Preuve:

- On suppose $a_n = O(b_n)$

Soit $\rho \in E_b = \{\rho \geq 0 \text{ tq } (b_n \rho^n)_n \text{ bornée}\}$.

$$a_n \rho^n = O(b_n)\rho^n = O(b_n \rho^n) = O(1) \quad \text{car } (b_n\rho^n)_n \text{ bornée}$$

donc $\rho \in E_a = \{\rho \geq 0 \text{ tq } (a_n \rho^n)_n \text{ bornée}\}$.

Donc $E_b \subset E_a$

donc $R_b \leq R_a$

- Si $|a_n| \leq |b_n|$, alors $a_n = O(b_n)$

donc $R_a \geq R_b$

- Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $a_n = O(b_n)$

et $b_n = O(a_n)$

donc $R_a \geq R_b$ et $R_b \geq R_a$

Ainsi $R_a = R_b$.

Exemple. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{z^n}{n^2+n+1} \qquad\qquad \sum \ln(1+n)z^n$$

- M1 : $R\left(\sum \frac{z^n}{n^2+n+1}\right)$

$= R\left(\sum \frac{1}{n^2} z^n\right)$ car $\frac{1}{n^2+n+1} \sim \frac{1}{n^2}$

$= 1$ car $R\left(\sum n^\alpha z^n\right) = 1$

M2 : $\frac{1}{n^2+n+1} \sim \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2} z^n$ est de rayon 1

donc $R\left(\sum \frac{1}{n^2+n+1} z^n\right) = 1$

- $\ln(1+n) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$

Or $1 \leq \ln(n) \leq n$ (au voisinage de $+\infty$)

donc $\underset{1}{\underset{\shortparallel}{R\left(\sum z^n\right)}} \geq R\left(\sum \ln n \, z^n\right) \geq \underset{1}{\underset{\shortparallel}{R\left(\sum n z^n\right)}}$

Remarque. *On aura, au § 4.3.4, un formulaire donnant le rayon de convergence des développements en série entière de référence.*

1.3.3 Rayon de $\sum n a_n z^n$

$R(\sum n a_n z^n) = R(\sum a_n z^n)$

Proposition. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Remarque. *On en déduit que les séries $\sum n^2 a_n z^n$, $\sum \frac{a_n}{n} z^n$ etc. ont toutes le même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$. Voir aussi au § 3.5 le théorème de dérivation terme à terme des séries entières.*

Preuve:

- $\forall n \geq 1 \quad |a_n| \leq |n a_n|$

  donc $R(\sum a_n z^n) \geq R(\sum n a_n z^n)$

- Soit $|z_0|$ tq $(a_n |z_0|^n)_n$ bornée

  Soit $\rho < |z_0|$

$$|n a_n \rho^n| = \left|n a_n z_0^n \cdot \left(\frac{\rho}{|z_0|}\right)^n\right|$$

$$= |a_n z_0^n| \, n \left(\frac{\rho}{|z_0|}\right)^n$$

$$= O(1) \, \underbrace{n \left(\frac{\rho}{|z_0|}\right)^n}_{\to 0}$$

$$= o(1)$$

donc $(n a_n \rho^n)_n$ est bornée

Ainsi $R(\sum n a_n z^n) \geq \rho$

Vrai $\forall \rho < |z_0|$

donc $R(\sum n a_n z^n) \geq |z_0|$

vrai $\forall |z_0| \in E_{\sum a_n z^n}$

donc $R(\sum n a_n z^n)$ majore $E_{\sum a_n z^n}$

donc $\geqslant R(\sum a_n z^n)$

1.3.4 Utilisation de la règle de d'Alembert

Règle de d'Alembert pour les séries entières.

Dom $[0,+\infty]$

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec $a_n \neq 0$ pour tout n. Si $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $R = \dfrac{1}{\ell}$.

Remarque.

- *Cette méthode est commode lorsque a_n est une fraction rationnelle, ou une exponentielle, ou contient des factorielles. Elle est peu adaptée aux cas où a_n est défini par cas ou de façon un peu abstraite.*
- *Lorsque $\ell = +\infty$, $R = 0$; lorsque $\ell = 0$, $R = +\infty$.*
- *Lorsque la suite $(a_n)_n$ s'annule, on peut envisager d'utiliser la règle de d'Alembert pour les séries numériques, à $z \neq 0$ fixé.*
- *Souvent, la détermination du rayon de convergence peut se faire sans utiliser la règle de d'Alembert.*

Exemple. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{n!}{n^n} z^n \qquad \sum \frac{z^{2n}}{n^2+1} \qquad \sum \frac{2^n}{3^n+1} z^{3n} \qquad \sum \frac{n}{2^n} z^{3n}$$

$\sum \dfrac{n!}{n^n} z^n$

Appliquons la règle de d'Alembert :

$$\left| \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \right| = (n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= e^{-n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}$$

Donc $R = e$

Ex 2 : $\dfrac{n!}{n^n} \sim \dfrac{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}\,\frac{n^n}{e^n}}{n^n} = \sqrt{2\pi}\sqrt{n}\,e^{-n}$

$$R\left(\sum \sqrt{2\pi}\sqrt{n}\,e^{-n} z^n\right) = R\left(\sum e^{-n} z^n\right)$$

car $1 \leq \sqrt{n} \leq n$

$$= e$$

car $\sum \left(\frac{z}{e}\right)^n$ cv ~~ssi~~ $\left|\frac{z}{e}\right| < 1$

$\sum \frac{z^{2n}}{n^2+1}$

$$\begin{cases} a_{2n+1} = 0 \\ a_{2n} = \dfrac{1}{n^2+1} \end{cases}$$

$$R\left(\sum \frac{z^{2n}}{n^2+1}\right) = R\left(\sum \frac{z^{2n}}{n^2}\right)$$

$$= R\left(\sum z^{2n}\right)$$

$$= 1 \qquad \text{(géométrique)}$$

$\sum \frac{2^n}{3^n+1} z^{3n}$

$$R\left(\sum \frac{2^n}{3^n+1} z^{3n}\right) = R\left(\sum \frac{2^n}{3^n} z^{3n}\right)$$

$$= R\left(\sum \left(\frac{2}{3} z^3\right)^n\right)$$

$\sum \left(\frac{2}{3} z^3\right)^n$ cv ssi $\left|\frac{2}{3} z^3\right| < 1$

i.e. $|z| < \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

donc $R = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

Exemple. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \sin(n) z^n \qquad\qquad \sum a_n z^n \text{ où } \begin{cases} a_{2n} = 2^{2n} \\ a_{2n+1} = 1 \end{cases}$$

$\sum \sin(n) z^n$

- $|\sin n| \leq 1$

  donc $R(\sum \sin(n) z^n) \geq \underbrace{R(\sum 1 z^n)}_{= 1}$

- $\sum \sin(n) 1^n$ diverge grossièrement.

  donc $R \leq 1$

$\sum a_n z^n$ où $\begin{cases} a_{2n} = 2^{2n} \\ a_{2n+1} = 1 \end{cases}$

- $\forall n \quad a_n \geq 1$

  donc $R \leq R(\sum 1 z^n) = 1$

- Si $|z| > \frac{1}{2}$, $|2^{2n} z^{2n}| > (2z)^{2n} \longrightarrow +\infty$

  non bornée donc $R \leq \frac{1}{2}$

- pour $z = \frac{1}{2}$, $(a_{2n} z^{2n})_n$ est bornée, mais ne tend pas vers 0.