Pour ve : 67.3, 67.4, 67.5

Remarque. *Il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.*

Exemple. On note $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$ et on donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v=\sqrt{\pi}$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ pour $x\to+\infty$. Donner un équivalent pour $x\to+\infty$.
2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ pour $x\to 0$.

Existence de $f(x)$

Pour $x>0$ fixé.

* $t\longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}$ continue (par mcx) sur $[0,+\infty[$
* au voi de $t\to+\infty$,

$$\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}=o\left(e^{-xt}\right)$$ intégrable en $+\infty$

Limite pour $x\longrightarrow+\infty$

* $\forall t\in\,]0,+\infty[$,

$$h(x,t)=\frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$ ← noté $\ell(t)$

* domination : $\forall x\in[7,+\infty[$, $\forall t\in\,]0,+\infty[$

$$|h(x,t)|=\frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}$$

$$\leq e^{-7t}$$ indep de x

intégrable sur $]0,+\infty[$

Donc, par cv dominée à param continu

$$f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\int_0^{+\infty}0\,dt=0$$

Équivalent de $f(x)$ en $x \to +\infty$.

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cdot \frac{1}{\sqrt{t+1}} \, dt$$

$$f(x) = \underbrace{\left[e^{-xt} \, 2\sqrt{t+1} \right]_0^{+\infty}}_{-2} - \underbrace{\int \qquad}_{\to -2}$$

$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

$(t+1)^{-\frac{1}{2}}$

$$f(x) = \underbrace{\left[-\frac{1}{x} e^{-xt} \frac{1}{\sqrt{t+1}} \right]_0^{+\infty}}_{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} \underbrace{\int - \quad e^{-xt} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (t+1)^{-3/2} \, dt}_{\underset{x \to +\infty}{o(1)} \, ?}$$

Par parties, sous réserve de limites finies du crochet :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{1}{\sqrt{t+1}} \, dt$$

$$= \left[-\frac{1}{x} e^{-xt} \frac{1}{\sqrt{t+1}} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{x} e^{-xt} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{(t+1)^{3/2}} \, dt$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(t+1)^{3/2}} \, dt}_{g(x)}$$

Comme pour la limite de $f(x)$ en $+\infty$,

$g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par conv. dominée à param. continu avec domination : $\left| \frac{e^{-xt}}{(t+1)^{3/2}} \right| \leq \frac{e^{-7t}}{(t+1)^{3/2}}$

$\forall x \in [7, +\infty[$

Donc $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot g(x)$

$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x} o(1)$

$= \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

donc $\underline{f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}}$

② On pose $u = xt$ (ici, x est fixé > 0)

$du = x\,dt$

u de 0 à $+\infty$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{\frac{u}{x}+1}} \cdot \frac{du}{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u+x}}\,du}_{\text{noté } h(x)}$$

On cherche la limite de $h(x)$ pour $x \to 0$

- pour $u \in]0,+\infty[$,

$$\frac{e^{-u}}{\sqrt{u+x}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$$

- domination :

$$\left| \frac{e^{-u}}{\sqrt{u+x}} \right| \leq \underbrace{\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}}_{\text{notée } \varphi(u)} \quad \text{indep de } x$$

φ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car :

$* \ \varphi$ cpm sur $]0,+\infty[$

$*$ au vois de 0, $\varphi(u) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{u}}$

qui est intégrable en 0 $(\alpha = \frac{1}{2} < 1)$

$*$ au vois de $+\infty$, $\varphi(u) = o(e^{-u})$

qui est intégrable en $+\infty$

Par cv dominée, $h(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi}$

Ccl : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$

2 Dérivation

Remarque. *Étudier les variations d'une fonction f, c'est comparer $f(x)$ et $f(y)$ pour $x \leqslant y$. On peut souvent le faire en comparant les intégrandes $h(x,t)$ et $h(y,t)$.*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\,dt$$

si $x \leq y$, $\forall t \in]0,+\infty[$ $\quad \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} \geq \dfrac{e^{-yt}}{\sqrt{t+1}}$

donc $f(x) \geq f(y)$

$$f(x) = \int_I h(x,t)\,dt \qquad\qquad f'(x) = \int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,dt$$

2.1 Classe $\mathcal{C}^1$

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $h : \begin{array}{ccc} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$

Si :

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est cpm et **intégrable** sur I ;
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est cpm sur I ;
- $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \qquad \forall (x,t) \in A \times I$$

  où $\varphi(t)$ est intégrable sur I et indépendante de x.

Alors :

- la fonction : $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;
- pour tout $x \in A$: $f'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$

Remarque. *L'hypothèse de domination est l'hypothèse fondamentale. Elle justifie aussi l'intégrabilité de $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$.*

Remarque. *L'intégrabilité de $t \mapsto h(x,t)$ est souvent conséquence de la domination du théorème de continuité.*

Exemple. On reprend $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\,dt$.

Étudier la dérivabilité de f puis donner une expression simple de $f(x)$.

On donne : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On note $h(x,t) = e^{-t^2} \cos(xt)$

- $t \longmapsto h(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

(vu hier)

- $x \longmapsto h(x,t) = e^{-t^2} \cos(xt)$ $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ $\quad \forall t \in [0,+\infty[$

et $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = e^{-t^2}\, t\, (-) \sin(xt)$

- Domination :

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) \right| = e^{-t^2}\, t\, |\sin(xt)|$$
$$\leq \underbrace{t\, e^{-t^2}}_{\text{notée } \varphi(t)} \qquad \text{indép de } x$$

Vérifions que φ est intégrable sur $[0,+\infty[$:

$*$ φ cpm sur $[0,+\infty[$

$*$ Au voi de $+\infty$

$$\varphi(t) = t\, e^{-t^2}$$
$$= t\, e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$
$$= o(1) \cdot o(e^{-t})$$
$$= o(e^{-t})$$

Donc par le th de classe $\mathcal{C}^1$ ds int à paramètre

f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} -t e^{-t^2} \sin(xt)\, dt$$

- Par parties, sous réserve de limites finies du crochet :

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} -t e^{-t^2} \sin(xt)\, dt$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(xt) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-t^2} . x . \cos(xt)\, dt$$

$$= 0 - 0 - \frac{x}{2} f(x)$$

donc f est sol de l'E.D. $y' + \frac{x}{2} y = 0$

donc $\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = C e^{-\frac{x^2}{4}}$

avec $f(0) = C = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

<u>ccl</u> : $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}$.

67.2

On pose, pour tout x de $]0,+\infty[$ et pour tout t de $]0,+\infty[$:

$$f(x,t) = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$$

~~(a)~~ Démontrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose, pour $x \in]0,+\infty[$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$$

(b) Démontrer que, pour tout x de $]0,+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(c) Démontrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

(b) Soit $x > 0$. Par parties, sous réserve de limites finies du crochet :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \, dt$$

$$= \left[-e^{-t} t^x \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-t} x t^{x-1} \, dt$$

$$= 0 - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } x>0 \\ t^x \xrightarrow[t \to 0]{} 0}}{0} + x \Gamma(x)$$

$$= x \Gamma(x)$$

Parenthèse :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^0 \, dt$$

$$= 1$$

$$\Gamma(2) = 1 . \Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2\,\Gamma(2) = 2$$
$$\vdots$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1)$$
$$= (n-1)(n-2)\ldots 1\,\Gamma(1)$$
$$= (n-1)!$$

Γ prolonge à $\mathbb{R}_+^*$ la factorielle de $(n-1)$.

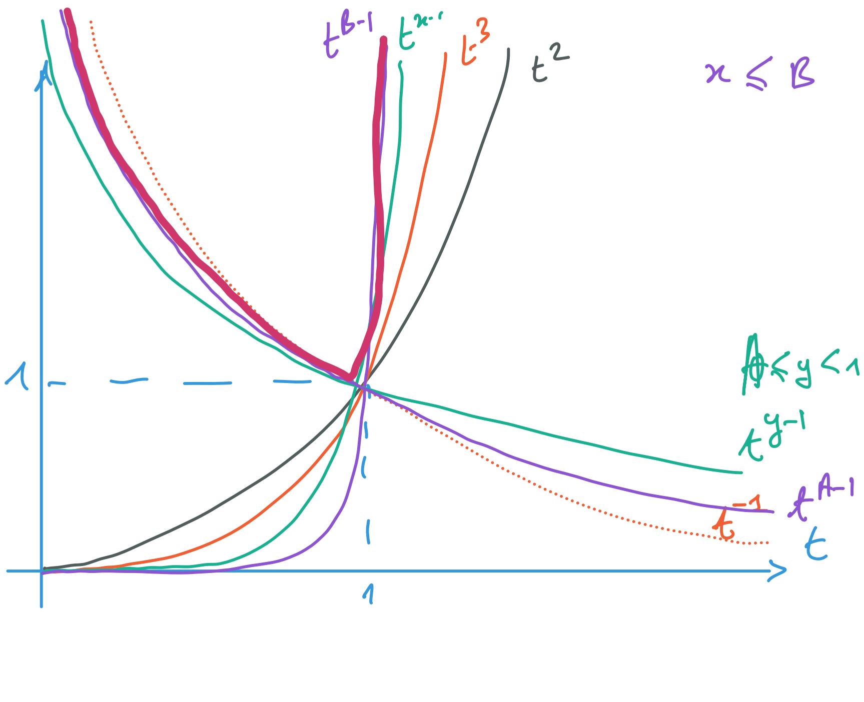
(c) On note $h(x,t) = e^{-t}\,t^{x-1}$ pour $t \in]0,+\infty[$, $x>0$

- $t \mapsto h(x,t)$ intégrable sur $]0,+\infty[$ (vu hier) $\forall x>0$

- $x \mapsto h(x,t) = e^{-t}\,e^{(x-1)\ln t}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$

et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = e^{-t}.\ln t.\,e^{(x-1)\ln t}$

$= \ln t\; e^{-t}\, t^{x-1}$ $\forall t\in]0,+\infty[$



• <u>domination</u>: $\forall x \in [A,B] \subset]0,+\infty[\quad \forall t \in]0,+\infty[$

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = |\ln t|\, e^{-t}\, t^{x-1}$$

$$\leq \underbrace{\begin{cases} |\ln t|\, e^{-t}\, t^{A-1} & \text{si } t \in]0,1[\\ |\ln t|\, e^{-t}\, t^{B-1} & \text{si } t \in [1,+\infty[\end{cases}}_{\varphi(t)}$$

indépendante de x.

<u>Mq que φ est intégrable sur $]0,+\infty[$:</u>

* φ est continue par mcx sur $]0,+\infty[$

* au voisinage de $t \to +\infty$

$$\varphi(t) = \ln t \; e^{-t}\; t^{B-1}$$

$$= o(e^{t/4})\, e^{-t}\, o(e^{t/4})$$

$$= o(e^{-t/2}) \quad \text{intégrable en } +\infty$$

* au voisinage de $t \to 0$

$$\varphi(t) = -\ln t \; e^{-t}\; \frac{1}{t^{1-A}}$$

$t^{\alpha} \ln t \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

$\forall \alpha > 0$

$$\sim -\ln t \,.\, 1 \,.\, \frac{1}{t^{1-A}}$$

$$= \underbrace{-t^{\frac{A}{2}} \ln t}_{\to 0} \cdot \frac{1}{t^{1-\frac{A}{2}}}$$

$$= o(1) \cdot \frac{1}{t^{1-\frac{A}{2}}}$$

$$= o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{A}{2}}}\right)$$

où $1-\frac{A}{2} < 1$ donc intégrable en 0.

Ccl : par le th de classe $\mathcal{C}^1$, Γ est $\mathcal{C}^1$ et

$\forall x>0 \qquad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \; t^{x-1} \, dt.$

Raisonnement classique. La dérivabilité, la classe $\mathcal{C}^1$ sont des notions locales. On peut donc appliquer le théorème précédent localement, par exemple sur tout segment de A.

Exemple. Pour $x \in \left]-1, +\infty\right[$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \, \mathrm{d}t$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-1, +\infty\right[$, et donner une expression de $f'(x)$ à l'aide des fonctions usuelles. En déduire une expression de $f(x)$.

On note $h(x,t) = \dfrac{t-1}{\ln t} t^x$ pour $x > -1$, $t \in]0,1[$

- Intégrabilité de $t \mapsto h(x,t)$ sur $]0,1[$

$*$ $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t} t^x$ est continue sur $]0,1[$

$*$ au voisinage de 0 :

$$\frac{t-1}{\ln t} t^x \sim \frac{-1}{\ln t} \cdot \frac{1}{t^{-x}}$$

$$= o\left(\frac{1}{t^{-x}}\right) \quad \text{car } |\ln t| \to \infty$$

intégrable en 0 car $-x < 1$

$*$ au voisinage de $t = 1$, $u \xrightarrow{>} 0$

$$h(x, 1-u) = \frac{-u}{\ln(1-u)} \cdot (1-u)^x$$

$$\sim \frac{-u}{-u} \, 1$$

$$\xrightarrow[u \to 0]{} 1$$

donc $t \mapsto h(x,t)$ se prolonge par continuité en 1, donc est intégrable en 1.

- $x \mapsto h(x,t) = \dfrac{t-1}{\ln t}\, e^{x \ln t}$

est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ et

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = (t-1)\, e^{x\ln t}$$
$$= (t-1)\, t^x$$
$$= t^{x+1} - t^x$$

- Dominos : $\forall x \in [A,+\infty[\subset]-1,+\infty[$

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq t^{x+1} + t^x \qquad \forall t \in]0,1[$$
$$\leq 1 + t^A$$

indép de x

intégrable sur $]0,1[$

car $\dfrac{1}{t^{-A}}$ intégrable en 0 ;

comme $-A < 1$

CCl : f est $\mathcal{C}^1$ sur tout $[A,+\infty[\subset]-1,+\infty[$,

donc sur $]-1,+\infty[$ et

$$f'(x) = \int_0^1 t^{x+1} - t^x \, dt$$
$$= \left[\frac{t^{x+2}}{x+2} - \frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

Donc $\exists C$ tq $\forall x > -1$,

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + C$$

<u>Déterminons C</u> : avec la limite en $+\infty$.

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \, dt$$

$*$ $\displaystyle \frac{t-1}{\ln t} t^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \qquad \forall t \in]0,1[$

$*$ $\displaystyle \left| \frac{t-1}{\ln t} t^x \right| \leq \underbrace{\left| \frac{t-1}{\ln t} \right|}_{\text{intégrable (car } x=0)} \qquad \forall x \geq 0$

donc par cv dominée, $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} C$$

donc $C = 0$.

<u>Ccl</u> : $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$

2.2 Extension à la classe $\mathcal{C}^k$

En itérant le théorème de dérivation k-fois, on peut justifier le résultat suivant :

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, $h\ :\ \begin{array}{rcl} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Si :

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est cpm et **intégrable** sur I ;
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est **de classe** $\mathcal{C}^k$ sur A ;
- pour tout $p \in \{1, \dots, k-1\}$, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)$ est cpm et **intégrable** sur I ;
- $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}$ satisfait l'**hypothèse de domination** :
$$\left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \qquad \forall (x,t) \in A \times I$$
où $\varphi(t)$ est intégrable sur I et indépendante de x.

Alors :

- la fonction : $f\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A ;
- pour tout $p \in \{1, \dots, k\}$, pour tout $x \in A$: $f^{(p)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)\,\mathrm{d}t$

Exemple : Rque Γ est $\mathcal{C}^\infty$ et donc $\Gamma^{(k)}(x)$