Pour $j\acute{e}$: 67.1, 67.9, 54.43

Intégrales à paramètre

$$\int_0^x f(t)\,dt \qquad \int_x^{+\infty} f(t)\,dt$$

$$f : x \longmapsto \int_I h(x,t)\,dt$$

1 Continuité

1.1 Continuité des intégrales à paramètre

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $h : \begin{array}{ccc} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$

Si :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est **continue** sur A ;
- ~~pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;~~
- h satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que

$$|h(x,t)| \leqslant \varphi(t) \qquad \forall (x,t) \in A \times I$$

  où $\varphi(t)$ est intégrable sur I et indépendante de x.

Alors :

- pour tout $x \in A$, l'application $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur I
- la fonction : $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur A.

Remarque. *L'hypothèse de domination est vraiment l'hypothèse fondamentale de ce théorème.*
L'application de ce théorème permet de justifier en particulier que f est définie sur A. Mais l'analyse menée lors de l'étude de la convergence de l'intégrale fournit en général les clefs de la domination.

Exemple. On note $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$. Donner le domaine de définition de f, et étudier sa continuité.

Notons $h(x,t) = e^{-t^2}\cos(xt)$ pour $t \in [0,+\infty[$
$x \in \mathbb{R}$

<u>Domaine de définition de f</u>

Pour quels x $f(x)$ existe ? ie $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)$ cv ?

* $t \mapsto e^{-t^2}\cos(xt)$ continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$

* au voisinage de $+\infty$ $e^{-t^2}\cos(xt) = e^{-t^2}O(1)$

$= o(e^{-t})$
intégrable en $+\infty$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe donc $D_f = \mathbb{R}$

Continuité

$$h(x,t) = e^{-t^2} \cos(xt)$$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\, dt$$

$*$ $x \mapsto h(x,t)$ continue sur $\mathbb{R}$ $\forall t \in [0,+\infty[$

$*$ dominons :

$\forall t \in [0,+\infty[$
$\forall x \in \mathbb{R}$

$$|h(x,t)| = e^{-t^2} |\cos(xt)|$$

$$\leq \underbrace{e^{-t^2}}_{\varphi(t)} \quad \text{indépendante de } x$$

et φ est intégrable sur $[0,+\infty[$

car continue sur $[0,+\infty[$ et au

vois de $+\infty$, $\varphi(t) = o(e^{-t})$ intégrable.

Donc, par le th de continuité,

f est continue sur $\mathbb{R}$

Remarque. *Lorsque l'intégrale n'est pas généralisée, on peut utiliser comme fonction dominante une fonction constante.*

Exemple. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \cos(xt)\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$*$ $x \longmapsto \cos(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}$ $\forall t \in [0,1]$

$*$ dominons:

$\forall t \in [0,1], \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad |\cos(xt)| \leq 1$ indépendante de x
intégrable sur $[0,1]$

Donc, par th de continuité, f définie et continue sur $\mathbb{R}$

Raisonnement classique. La continuité étant une propriété locale, on peut appliquer le théorème précédent localement, par exemple sur tout segment de A.

Remarque. *On ne peut pas modifier l'intervalle d'intégration ! Le caractère « local » porte bien sur la variable x, pas la variable d'intégration t.*

Exemple. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin t}{x\sqrt{t}+t}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $]0,+\infty[$.

- Montrons d'abord que f est définie sur $]0,+\infty[$

(≠ "Mque $D_f =]0,+\infty[$ ") $\quad h(x,t) = \dfrac{e^{-xt}\sin t}{x\sqrt{t}+t}$

Soit $x \in]0,+\infty[$ fixé.

* $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}\sin t}{x\sqrt{t}+t}$ continue (par mcx) sur $]0,+\infty[$

* au voi de $t \to 0$

$$\frac{e^{-xt}\sin t}{x\sqrt{t}+t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1 \cdot t}{x\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t}}{x} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

donc $t \mapsto h(x,t)$ se prolonge par cont en 0,

donc l'intégrale est faussement généralisée en 0.

* au vois de $t \to +\infty$

$$\frac{e^{-xt}\sin t}{x\sqrt{t}+t} \sim \frac{e^{-xt}\,O(1)}{t} = o\left(e^{-xt}\right)$$

intégrable en $t \to +\infty$

Ccl : f est définie sur $]0,+\infty[$

• Étude de la continuité.

* $x \longmapsto \dfrac{e^{-xt}\sin t}{x\sqrt{t}+t}$ est continue sur $]0,+\infty[$

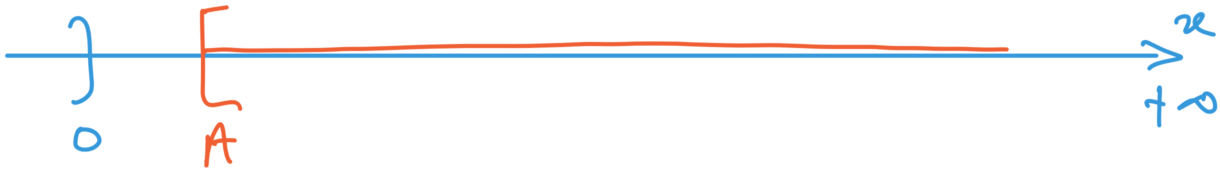
$\forall t \in]0,+\infty[$

* Domination : $\forall x \in]0,+\infty[$ $\forall t \in]0,+\infty[$

$$\left|\frac{e^{-xt}\sin t}{x\sqrt{t}+t}\right| = \frac{e^{-xt}\,|\sin t|}{x\sqrt{t}+t}$$

$$\leq \frac{1.\ |\sin t|}{t}$$

Zut, pas intégrable.



* Domination localement :

$\forall x \in [A,+\infty[\subset]0,+\infty[$ $\forall t \in]0,+\infty[$

$$|h(x,t)| = \frac{e^{-xt}\,|\sin t|}{x\sqrt{t}+t}$$

$$\leq \frac{e^{-At}\,|\sin t|}{A\sqrt{t}+t}$$ indép. de x

intégrable sur $]0,+\infty[$

(par l'étude précédente, avec x fixé $= A$)

Donc, par le th de continuité, f est continue sur tout $[A,+\infty[\subset]0,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$.

<u>Rmq</u> : On pouvait donner différemment
$$|h(x,t)| \leq \frac{e^{-At}}{A\sqrt{t}}$$

On pose, quand c'est possible
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$$

- Domaine de définition ?
- Continuité ?
- Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

$* \; t \longmapsto e^{-t} t^{x-1}$ est continue (par mcx) sur $]0,+\infty[$

(parfois sur $[0,+\infty[$ lorsque $x-1 \geq 0$)

$*$ <u>Au voi de $t \to +\infty$</u>

$$e^{-t} t^{x-1} = e^{-\frac{t}{2}} \cdot \frac{t^{x-1}}{e^{t/2}}$$
$$= e^{-t/2}\, o(1)$$
$$= o(e^{-t/2}) \quad \text{intégrable en } +\infty$$

* <u>Au vois de $t \to 0$</u>

$$e^{-t}\, t^{x-1} \sim \frac{1}{t^{1-x}}$$

qui est intégrable ssi $1-x < 1$

ie $x > 0$

par positivité, l'intégrale est cv

ssi $x > 0$

<u>Ccl</u> : $D_\Gamma =]0,+\infty[$

• <u>Étude de la continuité.</u>

* $x \longmapsto e^{-t}\, t^{x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$

$\quad\quad\quad\quad e^{-t}\, e^{(x-1)\ln t}$

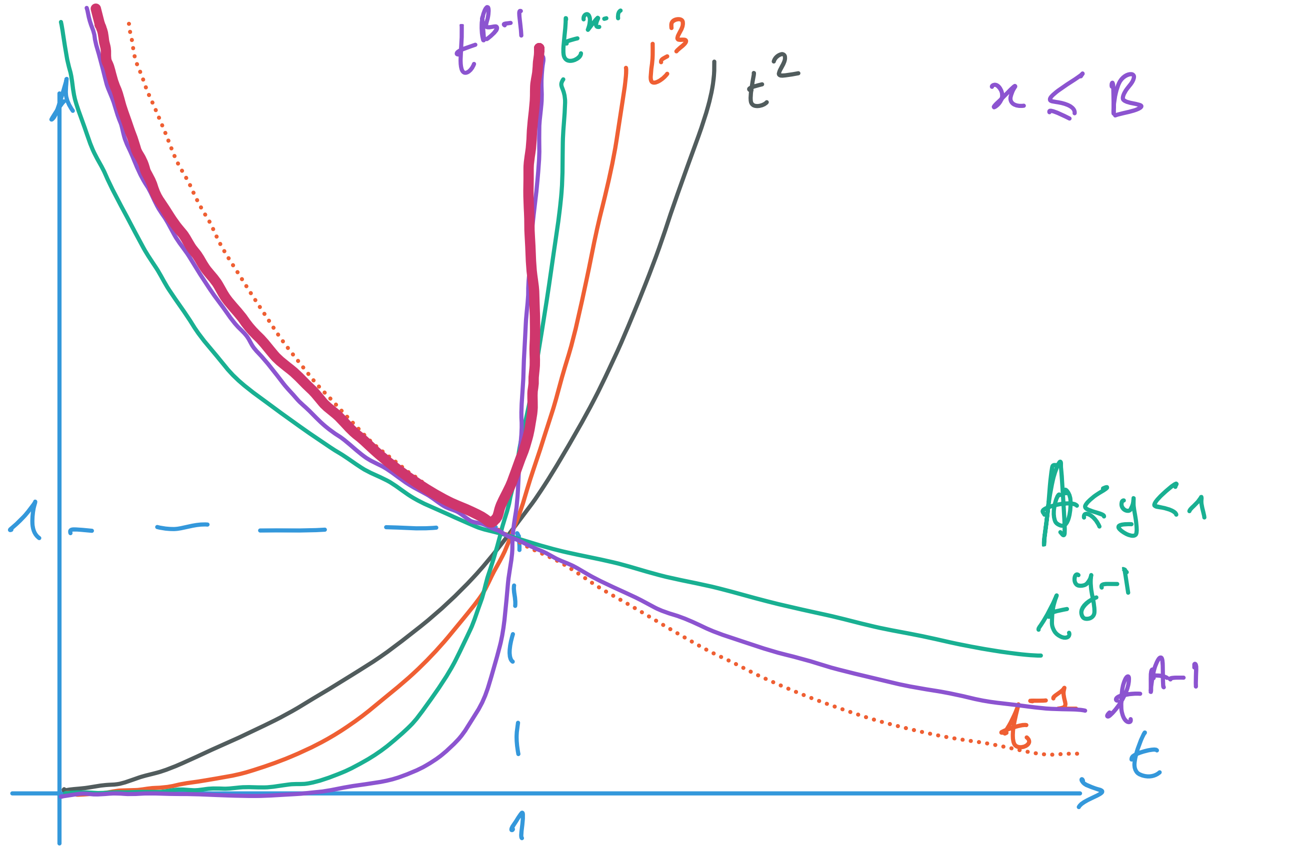
* <u>Domination locale</u> : $\forall x \in [A, B] \subset]0,+\infty[$

$\forall t \in]0,+\infty[$

$$|e^{-t}\, t^{x-1}| = e^{-t}\, t^{x-1}$$

$$\le \underbrace{\begin{cases} e^{-t}\, t^{A-1} & \text{pour } t \in]0,1] \\ e^{-t}\, t^{B-1} & \text{pour } t \in]1,+\infty[\end{cases}}_{\text{notée } \varphi(t)}$$

indép. de x



Mqu φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

* au voi de $t \to +\infty$

$$\varphi(t) = e^{-t} t^{B-1}$$

$$= o(e^{-t/2}) \quad \text{intégrable en } +\infty$$

* au voi de $t \to 0$

$$\varphi(t) = e^{-t} t^{A-1}$$

$$\sim \frac{1}{t^{1-A}} \quad \text{intégrable en } 0$$

car $1-A<1$

Donc φ est bien intégrable sur $]0,+\infty[$

CCl : Γ est continue sur tout $[A,B] \subset]0,+\infty[$

donc sur $]0,+\infty[$.

Rmq : On trouve parfois, et c'est nul, la fct domination suivante :

$$\varphi(t) = e^{-t}\left(t^{A-1} + t^{B-1}\right)$$

1.2 Limite des intégrales à paramètre

Théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, a une borne de A éventuellement infinie et $h : \begin{array}{ccc} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$

Si :

- pour tout $t \in I$, $h(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} \ell(t)$;
- ~~pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I~~ ;
- h satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que

$$|h(x,t)| \leqslant \varphi(t) \qquad \forall (x,t) \in A \times I$$

où $\varphi(t)$ est intégrable sur I et indépendante de x.

Alors :

- ℓ est intégrable sur I
- $\displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t$

$$\int_I h(x,t)\,dt \xrightarrow[x \to a]{} \int_I \lim_{x \to a} h(x,t)\,dt$$

preuve : On veut déterminer la limite pour $x \to a$ de $f(x)$, par caractérisation séquentielle.

Soit $(u_n)_n$ qcq d'éléments de A tq $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$

on cherche la limite de $f(u_n)$

$$f(u_n) = \int_I h(u_n, t)\,dt$$

Posons $f_n(t) = h(u_n, t)$

$$f(u_n) = \int_I f_n(t)\,dt \qquad n \overset{?}{\to} +\infty$$

$\ast$ $f_n(t) = h(u_n, t)$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell(t)$$

car $h(x, t) \xrightarrow[x\to a]{} \ell(t)$

et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$

$\ast$ domination :

$$|f_n(t)| = |h(u_n, t)|$$

$\leq \varphi(t)$ indép de n

intégrable sur I

Donc par convergence dominée

$$f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I \ell(t)\,dt$$

Vrai pour toute suite $(u_n)_n$ tq $u_n \to a$,

donc $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \int_I \ell(t)\,dt$

Remarque. *Il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.*

Exemple. On note $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\,dt$ et on donne : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du = 2\int_0^{+\infty} e^{-v^2}\,dv = \sqrt{\pi}$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ pour $x \to +\infty$. Donner un équivalent pour $x \to +\infty$.
2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ pour $x \to 0$.

Existence de $f(x)$

Pour $x > 0$ fixé.

* $t \longmapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}$ continue (par max) sur $[0, +\infty[$

* au voi de $t \to +\infty$,

$$\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} = o\left(e^{-xt}\right) \quad \text{intégrable en } +\infty$$

Limite pour $x \longrightarrow +\infty$

* $\forall t \in]0, +\infty[$,

$$h(x,t) = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \quad \leftarrow \text{ noté } \ell(t)$$

* dominos : $\forall x \in [7, +\infty[$, $\forall t \in]0, +\infty[$

$$|h(x,t)| = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}} \leq e^{-7t} \quad \text{indep de } x$$

intégrable sur $]0, +\infty[$

Donc, par cv dominée à param continu

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} 0\,dt = 0$$