Pour ma : 54.35, 54.36

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\, dt$$

Séries de fonctions numériques – interversion série/intégrale

3 Intégration

3.1 Intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme

Théorème d'intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme.

Soit $a < b$, et $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un segment $[a, b]$.
Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ (on note S sa somme),
- $[a, b]$ est un segment,
- les f_n sont continues,

alors :

- la série $\sum \left(\int_a^b f_n(t)\, dt \right)$ converge,
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b S(t)\, dt$

Exemple. Soit $(a_n)_n$ une suite de complexe telle que $\sum a_n$ converge absolument. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note :

$$f(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \sin(pt)$$

Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) f(t)\, dt = a_m$$

- $\forall t \in \mathbb{R}$ $|a_p \sin pt| \leq |a_p|$ et $\sum |a_p|$ cv

donc $\sum a_p \sin(pt)$ converge : $f(t)$ existe.

• $I_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\, f(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \underbrace{a_p \sin(pt)\sin(nt)}_{g_p(t)}\, dt$

* $\forall t$ $|g_p(t)| \leq |a_p|$ indép de t

  donc $\sum g_p$ cv normalement donc unif sur $[-\pi, \pi]$ segment

* les g_p sont continues sur $[-\pi, \pi]$

Donc : $I_n = \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin pt \sin nt\, dt}_{J_{np}}$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$$J_{np} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(p-n)t - \cos(p+n)t\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(p-n)t\, dt - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(p+n)t\, dt$$

1er cas : si $p = n$

$$J_{nn} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dt - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2n)t\, dt$$

$$= \pi - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \pi$$

2e cas si $p \neq n$ $\quad J_{np} = 0$

Il reste $I_n = \frac{1}{\pi} \times$ lemme en $p=n$

$$= \frac{1}{\pi} \times \pi \, a_n$$

$$= a_n \, .$$

3.2 Interversion $\sum / \int$ sur un intervalle quelconque, dans le cas d'une série positive

Théorème d'intégration terme à terme, cas positif.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I.
Si :
- les f_n sont positives
- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme),
- les f_n et S sont continues par morceaux sur I
- les f_n sont intégrables sur I,

alors, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

- $\displaystyle\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque.

- *En particulier, l'intégrabilité de* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *sur* I *équivaut à* $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t < +\infty$.

Rmq : quand on applique ce théorème, on écrit :
"On calcule, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:"

Exemple. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

idée : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\,dt = \int_0^{+\infty} \sum \dots$

$\displaystyle = \sum \underbrace{\int \dots}_{\frac{1}{n^2}}$

$\forall u \in]0,1[\quad \dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ ou : $\dfrac{u}{1-u} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u^n$

Pour $t > 0$: $\dfrac{t}{e^t - 1} = t \cdot \dfrac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$ où $e^{-t} \in]0,1[$

$$= t \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-t})^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} t e^{-nt}$$

On note $f_n(t) = t e^{-nt}$

On remarque que $\forall t > 0, \ f_n(t) \geq 0$

donc, en calculant dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

* $\sum f_n$ CV simplement sur $]0, +\infty[$

(Bah oui, c'est notre série !)

* les f_n sont intégrables sur $]0, +\infty[$

en 0, $f_n(t) \longrightarrow 0$ donc l'intégrale est faussement généralisée

en $+\infty$, $f_n(t) = t e^{-nt} = o(e^{t/2}) e^{-nt}$

$$= o\left(e^{(-n+\frac{1}{2})t}\right)$$

avec $-n + \frac{1}{2} < 0$

donc f_n intégrable en $+\infty$.

(* les f_n et $\sum f_n$ sont continues sur $]0, +\infty[$)

Donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} t e^{-nt} \, dt$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t e^{-nt} \, dt$$

On calcule, par intégration par parties, sous réserve des limites finies des crochets :

$$\int_0^{+\infty} t\, e^{-nt}\, dt = \left[t \left(-\frac{1}{n}\right) e^{-nt} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 . \left(-\frac{1}{n}\right) e^{-nt}\, dt$$

$$= 0 - 0 + \frac{1}{n} . \int_0^{+\infty} e^{-nt}\, dt$$

$$= \frac{1}{n} \left[\left(-\frac{1}{n}\right) e^{-nt} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{n^2}$$

<u>Ainsi</u> :
$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

3.3 Interversion $\sum / \int$ sur un intervalle quelconque

Remarque. *Le théorème qui suit s'applique en particulier lorsque les intégrales sont généralisées.*

Théorème d'intégration terme à terme.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I.
Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme),
- les f_n et S sont continues par morceaux sur I
- les f_n sont intégrables sur I,
- la série numérique $\sum \left(\int_I |f_n(t)| \, \mathrm{d}t \right)$ converge,

cv de $\sum N_1(f_n)$

alors :

- la fonction S est intégrable sur I,
- $\displaystyle\int_I S(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \, \mathrm{d}t$

Remarque.

- *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \, \mathrm{d}t = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \, \mathrm{d}t$$

  Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et des intégrales envisagées.
- *L'intégrabilité des f_n sert à justifier l'existence des $\int_I f_n$.*
- *L'hypothèse importante de ce théorème est la convergence de la série $\sum \int |f_n|$.*

cv de la série de trg $\int_I |f_n|$

Exemple. ~~Montrer que :~~ $\cancel{\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}$.

$$\text{Mq}\quad \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$$

Rmq : $\forall t \in]0,1[,\quad \dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{1}{1-(-t^2)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-t^2)^n$

$\forall t \in]0,1[,\quad |-t^2| < 1$ donc $\dfrac{\ln t}{1+t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \ln t$

On note $f_n(t) = (-1)^n t^{2n} \ln t$

* $\sum f_n$ cv simplement sur $]0,1[$
* les f_n et la somme sont continues sur $]0,1[$
* les f_n sont intégrables sur I → cf calcul.
* cv de $\displaystyle\sum \int_0^1 |f_n(t)|\,dt$?

étude série → étude du t.g.

$$\int_0^1 |f_n(t)|\,dt = \int_0^1 t^{2n} (-\ln t)\,dt$$

$(\ln t < 0)$

par parties, sous réserve de limite finie du crochet et de cv des intégrales

$$= \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} (-) \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{2n+1} (-) \frac{1}{t}\,dt$$

$t^{2n+1}\ln t \underset{0}{\to} 0$

$$= 0 + \frac{1}{2n+1}\int_0^1 t^{2n}\,dt$$

$$= \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\sim \frac{1}{4n^2}$$ t.g. série convergente.

Donc :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \int_0^1 t^{2n}(-\ln t)\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

par le calcul précédent

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

par glissement d'indice

3.4 Utilisation de la convergence dominée

Remarque. *Lorsque le théorème du paragraphe précédent ne s'applique pas (lorsque $\sum \int_I |f_n|$ ne converge pas), on peut chercher à appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(S_n)_n$ des sommes partielles, ou à celle $(R_n)_n$ des restes, de la série de fonctions $\sum f_n$.*

Exemple. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Pour $t>0$,

$$\frac{1}{1+e^t} = \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}$$

$$= -\frac{(-e^{-t})}{1-(-e^{-t})} \qquad \text{où } |-e^{-t}|<1$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} (-e^{-t})^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-nt}$$

On veut mq $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-nt}\,dt = \sum \ldots$

↳ pas un segment

↳ pas des $f_n \geq 0$

↳ cv $\sum \int |f_n|$?

On note $f_n(t) = (-1)^{n+1} e^{-nt}$

On calcule : $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt$

$$= \frac{1}{n}$$

Zut ! $\sum \int |f_n|$ diverge.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}\,dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-nt}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} e^{-kt} + \int_0^{+\infty} R_n(t)\,dt$$

où $\displaystyle\frac{1}{1+e^t} = S_n(t) + R_n(t)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} (-1)^{k+1} e^{-kt}\,dt + \int_0^{+\infty} R_n(t)\,dt$$

par linéarité de l'intégrale (somme finie)

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}}_{\downarrow\, n \to +\infty} + \int_0^{+\infty} R_n(t)\,dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} ?$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

série harmonique alternée

On va appliquer le th de cv dominée à $\int_0^{+\infty} R_n(t)\,dt$

* $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} 0$ comme reste d'une série convergente.

* Dominons :

$\forall n, \forall t$
$t>0$

$$|R_n(t)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} e^{-kt}\right|$$

$\sum (-1)^{k+1} e^{-kt}$ relève du th des séries alternées car $(e^{-kt})_k$ est positive, décroissante, de limite nulle donc

$$|R_n(t)| \leq \left|(-1)^{n+2} e^{-(n+1)t}\right|$$
$$= e^{-(n+1)t}$$
$$\leq e^{-t} \quad \text{indép de } n$$

intégrable sur $]0,+\infty[$

Donc, par convergence dominée :

$$\int_0^{+\infty} R_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} 0\,dt = 0$$

Ouf! On a montré : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Exemple. Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$