Pour ce : 53.30, 53.31, 53.32

$(f_n)_n$ $\int_I f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} ?$

Suites de fonctions numériques – convergence dominée

$(f_n)_n$ suite de fonctions

- converge simplement vers f sur I

si $\forall t \in I,\quad f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(t)$ (à t fixé)

- converge uniformément vers f sur I

si $\|f_n - f\|_\infty^I \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

En pratique : On majore $|f_n(t) - f(t)|$

indép de t. (uniformément)

par qqch $\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

7 Intégration

7.1 Intégration sur un segment/primitivation et convergence uniforme

Théorème d'interversion limite-intégrale par cv uniforme sur un segment.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un segment $[a,b]$.
Si :

- $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$,
- $[a,b]$ est un segment,
- les f_n sont continues.

alors :

- la suite $\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ converge,
- $\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

7.2 Intégration sur un intervalle quelconque – Convergence dominée

Théorème de convergence dominée.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I.
Si :

- $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I ;
- $(f_n)_n$ satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$$

  où φ indépendante de n et **intégrable** sur I ;
- les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur I.

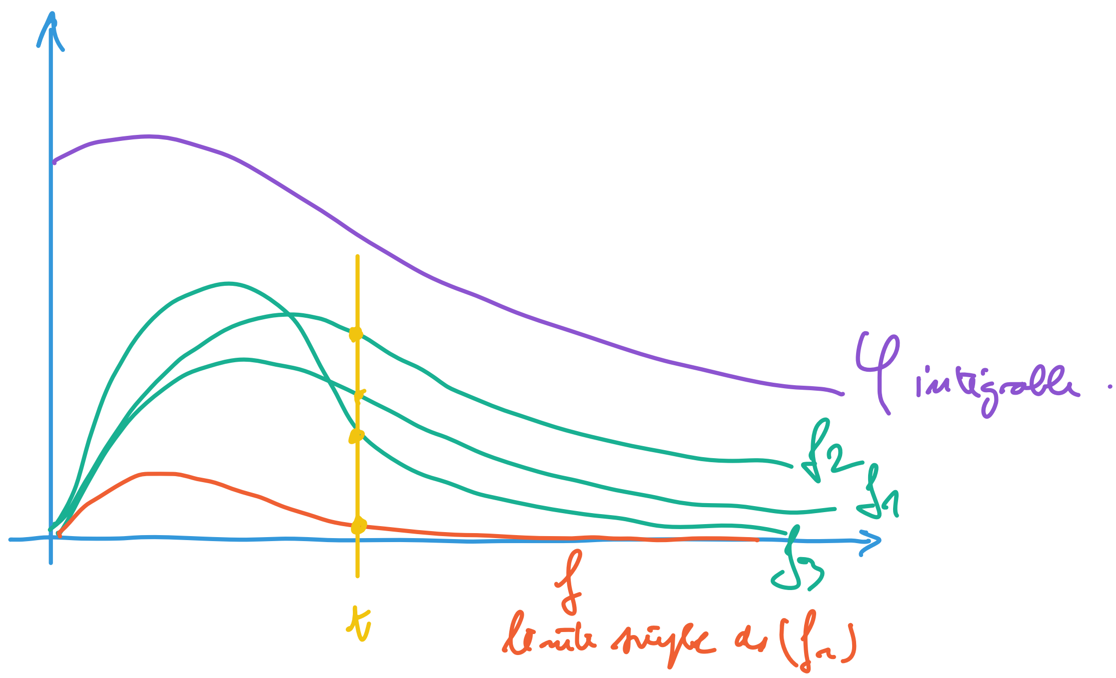
alors :

- les fonctions f_n et f sont intégrables sur I,
- la suite $\left(\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ converge,
- $\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.

φ est une fct indép de n, qui domine les f_n, ie majore la val abs de f_n sur tout I.

Remarque.

- *La 3ᵉ hypothèse, de régularité, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination, qu'il faut nommer et sur laquelle il faut insister lors de l'utilisation de ce théorème.*
- *La* ***fonction dominante*** *φ est bien-sûr positive (elle majore $|f_n|$) et continue par morceaux (elle est intégrable). C'est sur son intégrabilité qu'il faut insister.*
- *Lorsque I est un segment, on peut prendre une fonction dominante constante.*
- *Il est fréquent que, à t fixé, $(f_n(t))_n$ soit positive et monotone.*
  - *Lorsqu'elle décroît, f_1 peut être choisie comme fonction dominante ;*
  - *Lorsqu'elle croît, la limite f peut être choisie comme fonction dominante.*



Rmq. L'intégrabilité de f_n et f vient de la domination $|f_n| \leq \varphi$

ii $\forall t \in I \quad |f_n(t)| \leq \varphi(t)$

intégrable sur I

donc f_n intégrable sur I

En passant à la limite $|f(t)| \leq \varphi(t)$

donc f est intégrable sur I.

Exemple. Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$.

On note $f_n(x) = \tan^n x$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

- Étude de la cv simple.

Soit $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ fixé.

$*$ si $x < \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \tan x < 1$

donc $\tan^n x \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$*$ si $x = \frac{\pi}{4}$ $\tan^n x = 1 \xrightarrow[+\infty]{} 1$

Donc $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CS} f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{4}[\\ 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

- Dominons !

$\forall n, \forall x \quad |\tan^n x| \leq 1$

indépendant de n

intégrable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

- les f_n et f sont continues par mcx

Par convergence dominée, $\int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx \longrightarrow \underbrace{\int_0^{\pi/4} f(x) \, dx}_{= 0}$

pas 0

Rmq : on peut prendre un autre point de vue.

$$\int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx = \int_{[0,\frac{\pi}{4}[} \tan^n x \, dx$$ ← int généralisée.

On définit $f_n : [0, \frac{\pi}{4}[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \tan^n x$

- $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f : x \longmapsto 0$
- domination idem
- continuité

Par cv dominée $\int_{[0,\frac{\pi}{4}[} f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{[0,\frac{\pi}{4}[} 0 \, dx$

$\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx} \shortparallel$

$\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx} 0$

$\boxed{53.36}$

Déterminer la limite, pour $n \to +\infty$, de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + e^x}$$

On note $f_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{1}{x^n + e^x}$

- Étude de la cv simple

A $x \in [0, +\infty[$ fixé

* si $x < 1$, $f_n(x) = \frac{1}{x^n + e^x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{0 + e^x}$

* si $x = 1$ $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} \longrightarrow \dfrac{1}{1+e^x}$

* si $x > 1$ $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{x^n+e^x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{e^x} & \text{si } x<1 \\ \dfrac{1}{1+e} & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{si } x>1 \end{cases}$

• Dominons :

$\forall n, \forall x \quad |f_n(x)| = \dfrac{1}{x^n+e^x}$

$\leq \dfrac{1}{e^x}$ indépendant de n

$= e^{-x}$ intégrable sur $[0,+\infty[$

• Les f_n et f sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$

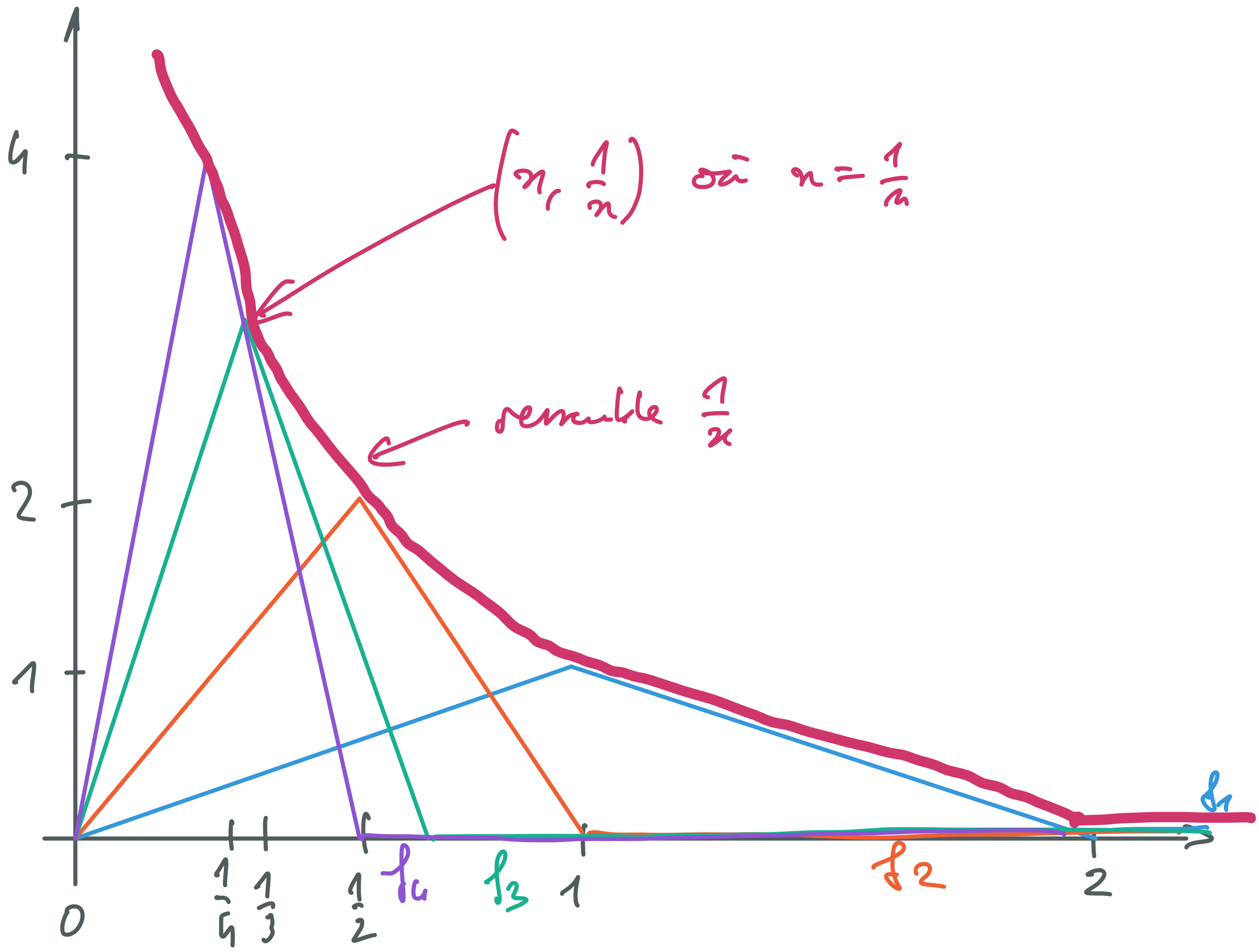
Donc, par cv dominée, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n+e^x}\,dx \longrightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{e^x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1-\frac{1}{e}$$

Exemple. Mettre en évidence l'importance de l'hypothèse de domination en considérant la suite de fonctions définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ n(2-nx) & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ ?$$



• <u>Étude de la cv simple.</u> Soit $x \in [0, +\infty[$ fixé.

* si $x = 0$, $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

* si $x > 0$, pour $n \to +\infty$, $\frac{2}{n} < x$

(à partir de $\lfloor \frac{2}{x} \rfloor + 1$)

donc $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} 0$ sur $[0, +\infty[$

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = 1$$

et pourtant $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = 0$

le th de ce dernière ne s'applique pas.

<u>Pas de domination</u>.

Exemple. Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Remarque. *On peut connaître la valeur* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$

On note $f_n :]-\infty, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$

- <u>Étude de la convergence simple</u> soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

$$f_n(x) = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)\right)$$

$$= \exp\left(-n\left(\frac{x^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \text{ au voisinage de } n\to+\infty$$

$$= \exp\left(-x^2+o(1)\right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x^2}$$

donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f : x \longmapsto e^{-x^2}$

- <u>Domination</u> :

$\forall n, \forall x \quad |f_n(x)| = \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$

$$= e^{-n\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)}$$

Posons $u(t) = t\ln\left(1+\frac{x^2}{t}\right)$

on étudie pour chercher un minorant.

$$u'(t) = \ln\left(1+\frac{x^2}{t}\right) + t\cdot(-)\frac{x^2}{t^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{t}}$$

$$= \ln\left(1+\frac{x^2}{t}\right) - \frac{x^2}{t+x^2}$$

$$u''(t) = -\frac{x^2}{t^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{t}} + \frac{x^2}{(t+x^2)^2}$$

$$= -\frac{x^2}{t^2+tx^2} + \frac{x^2}{(t+x^2)^2}$$

$t \geqslant 1$

$$= x^2\,\frac{-t^2-2tx^2-x^4+t^2+x^2t}{(t^2+tx^2)(t+x^2)^2}$$

$$= x^2\,\frac{-tx^2-x^4}{(t^2+tx^2)(t+x^2)^2}$$

< 0

t	1		$+\infty$
u''		$-$	
u'		$+$ $\searrow$	0
u		$\nearrow$	

Ainsi: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $n\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right) \geqslant \ln(1+x^2)$

donc $|f_n(x)| \leq e^{-\ln(1+x^2)}$

indépendant de n

$$= \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\text{noté } \varphi(x)}$$ intégrable sur $]-\infty,+\infty[$

En effet : φ continue sur $]-\infty,+\infty[$

et au voisinage de $\pm\infty$, $\varphi(x) \sim \frac{1}{x^2}$

Les f_n et f sont continues sur $]-\infty,+\infty[$

Donc, par convergence dominée :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$