Pour je : 66.2, 66.6, 66.17

Pour lu : DS blanc ou DS rouge ?

2.5.2 Changement de variable

Le théorème du changement de variable est une technique efficace, et la formule doit pouvoir être utilisée « dans les deux sens ». L'entrainement permet d'avoir l'initiative de certains changements de variable classiques.

Le théorème est présenté pour l'étude de $\displaystyle\int_a^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ Si $\varphi : [\alpha,\beta[\ \to [a,+\infty[$ est :

- une bijection
- strictement croissante
- de classe $\mathcal{C}^1$

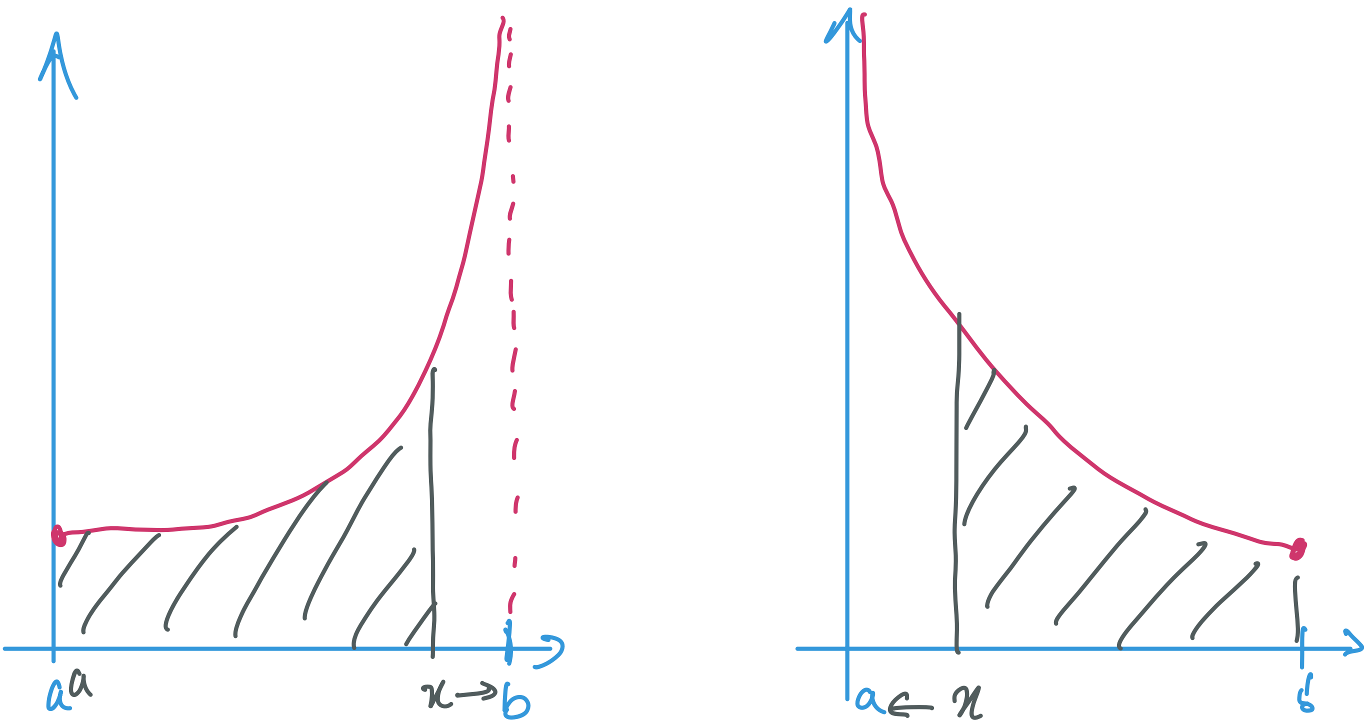
alors

- les deux intégrales $\displaystyle\int_a^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^{\to\beta} (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature ;
- elles sont égales en cas de convergence.

Remarque. *La convergence de l'intégrale est justifiée a posteriori par le changement de variable et la convergence de la nouvelle intégrale.*

Remarque. *Dans la pratique, on dit que l'on effectue le changement de variable $t=\varphi(u)$ et l'on écrit :*

t	*devient*	$\varphi(u)$
$\mathrm{d}t$	*devient*	$\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$
t de a à b	*devient*	u de α à β



2 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Remarque. *Sans autre précision, dans cette section, a et b sont tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et I désigne un intervalle dont les extrémités sont a et b.*
Lorsque a et b sont finis et $I = [a, b]$, il s'agit d'un segment.
Lorsque a est fini, $b = +\infty$ et $I = [a, +\infty[$, il s'agit du cas étudié au paragraphe précédent.

2.1 Intégrale convergente, intégrale divergente

Définition. Soit f une fonction continue par morceaux sur I.

- Lorsque $I = [a, b[$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \underset{x<b}{\longrightarrow} b$. Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.
- Lorsque $I =]a, b]$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\to a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \underset{x>a}{\longrightarrow} a$. Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.
- Lorsque $I =]a, b[$, on dit que l'intégrale est **doublement généralisée**.
  Prenant c tel que $a < c < b$, on dit qu'elle converge si et seulement si $\displaystyle\int_{\to a}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
  Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ la somme de ces deux intégrales convergentes.

Remarque. *Par le caractère local, cette double convergence ne dépend pas du choix de c. Par la relation de Chasles, la valeur de l'intégrale ne dépend pas du choix de c.*

Nature de l'intégrale sur $]-\infty, +\infty[$ de $f \begin{cases} \dfrac{(\operatorname{Arctan} t)^2}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

- f est continue sur $]-\infty, +\infty[$

  car $f(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{(t)^2}{t} = t \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0 = f(0)$

- Au voisinage de $+\infty$

  $f(t) = \dfrac{(\operatorname{Arctan} t)^2}{t}$

  $\underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{4t}$ non intégrable en $+\infty$

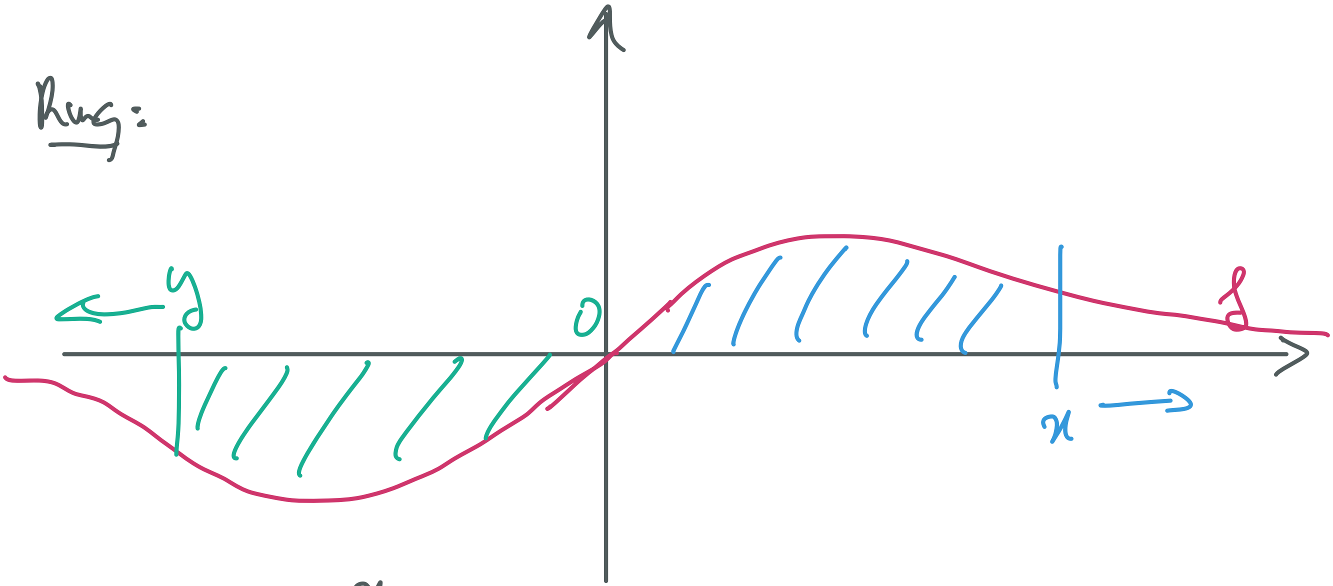
donc $\int^{+\infty} f(t)\,dt$ non abs-convergente

car $f(t) \geq 0$ pour $t > 0$

donc $\int^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est divergente.

Rmq:



$$\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 0 \quad \text{par imparité}$$

ne donne pas d'info sur $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$!!

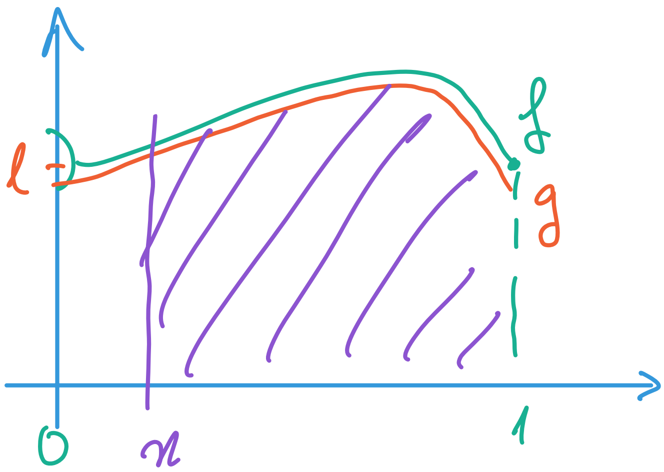
Proposition. Lorsque a (resp. b) est fini, et que f se prolonge par continuité en a (resp. b), alors l'intégrale généralisée en a (resp. b) converge et sa valeur coïncide avec l'intégrale de la fonction prolongée. On dit que l'intégrale est **faussement généralisée**.

Remarque. *Ça n'aurait aucun sens de parler d'intégrale faussement généralisée en $\pm\infty$.*

Exemple. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Preuve: On suppose f continue sur $]0,1]$

et f admet une limite finie ℓ en 0.



$$\int_x^1 f(t)\,dt$$

On pose $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x>0 \\ \ell & \text{si } x=0 \end{cases}$$

$\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt$ existe depuis l'an dernier

$\displaystyle\int_{\to 0}^1 f(t)\,dt$ est généralisée en 0.

est convergente si l'intégrale partielle

a une limite finie en 0 à droite.

$$\int_x^1 f(t)\,dt = \int_x^1 g(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 g(t)\,dt - \underbrace{\int_0^x g(t)\,dt}$$

$$\left|\int_0^x g(t)\,dt\right| \leq \int_0^x |g(t)|\,dt$$
$$\leq \|g\|_\infty^{[0,1]}\, x$$
(car g continue sur $[0,1]$ segment)

$$\xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

donc $\displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt \xrightarrow[x \to 0]{>} \int_0^1 g(t)\,dt$

Exemple : • $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0,1]$

• Au voisinage de $t \geq 0$,

$$\frac{\sin t}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{t} = 1 \xrightarrow[t \to 0]{} 1$$

donc $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ se prolonge par continuité en 0, donc l'intégrale est faussement généralisée, convergente.

Exemple complet à connaître (cf $\boxed{66.3}$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

convergente

(doublement généralisée)

non absolument convergente en $+\infty$.

2.2 Cas des fonctions positives

Remarque. *Lorsque f est positive, on autorise l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$ en cas de divergence.*
Un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de la convergence de l'intégrale.

3.2 Intégrabilité d'une fonction

Définition. On dit que f est **intégrable sur** I lorsque f est continue par morceaux sur I et l'intégrale de f sur I est absolument convergente.

Proposition.

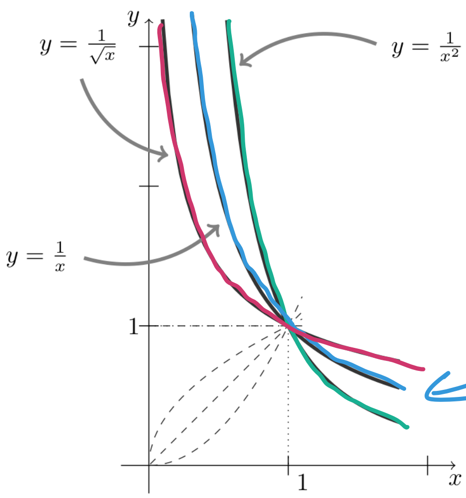
- Sur un segment $[a, b]$, une fonction continue est intégrable.
- Sur un intervalle $]a, b[$ borné, une fonction continue qui se prolonge par continuité en a et b est intégrable.

$\int^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ cv $\iff \alpha > 1$

Intégrales de Riemann en 0.

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\to 0}^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

- $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < 1$;

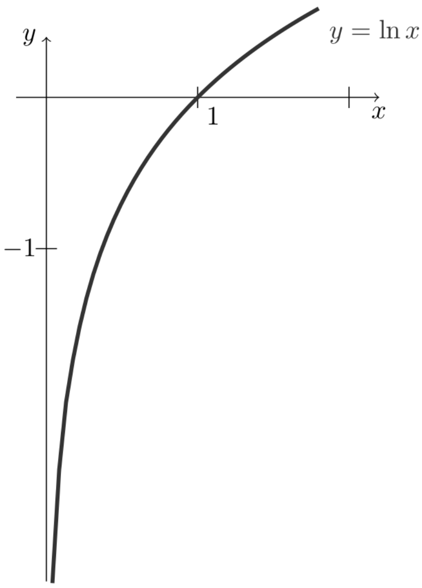


$\frac{1}{t}$

pour $\alpha \neq 0$ $\quad \displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \int_x^1 t^{-\alpha}\,dt = \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{-\alpha+1}\right]_x^1$

et $x \xrightarrow[>]{} 0$ . . .

Logarithme en 0. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\to 0}^{1} \ln t \,\mathrm{d}t$ converge. Sa valeur est négative.



- ln est intégrable en 0 ;

$t \mapsto \ln t$ est continue $]0,1]$

$$\int_0^1 (\ln t)^\alpha \, dt$$

Par les intégrales partielles :

$$\int_x^1 \ln t \, dt = \left[t \ln t - t \right]_x^1$$

$$= -1 - x \ln x + x$$

$$\xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ >}]{} -1$$

$$x \ln x \xrightarrow[0]{} 0$$

donc $\displaystyle\int_{\to 0}^1 \ln t \, dt$ converge

donc $\displaystyle\int_{\to 0}^1 -\ln t \, dt$ converge

c'est $\displaystyle\int_{\to 0}^1 |\ln t| \, dt$.

Proposition. La fonction f est intégrable en a (resp. en b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0

par translation de variable.

- $t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}$ est intégrable en a si et seulement si $\alpha < 1$.

$f : t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ continue sur $]a, +\infty[$

au voisinage de $h \underset{>}{\to} 0$ $f(a+h) = \dfrac{1}{h^\alpha}$ intégrable en 0

ssi $\alpha < 1$

donc f est intégrable en a à droite ssi $\alpha < 1$

3.3 Techniques d'étude

Énonçons maintenant le théorème dans le cas où $I =]0, b]$. On considère f, g deux fonctions continues par morceaux sur $]0, b]$.

Théorème.

Si $|f| \leqslant |g|$ et g intégrable sur $]0, b]$, alors f est intégrable sur $]0, b]$.

Théorème.

Si $f(x) \underset{x \to 0}{=} O(g(x))$ et g intégrable sur $]0, b]$, alors f est intégrable sur $]0, b]$.

Théorème.

Si $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} g(x)$ et g intégrable sur $]0, b]$, alors f est intégrable sur $]0, b]$.

Remarque. *Les théorèmes précédents s'adaptent à tous les cas d'intervalles semi-ouverts. On préfèrera cependant commencer par effectuer un changement de variable pour ramener le problème en 0 ou en $+\infty$, là où on sait comparer les fonctions entre elles.*

Exemple. Étudier l'intégrabilité sur un voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t}$ $\qquad g : t \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t\sqrt{t}}$ $\qquad h : t \mapsto \dfrac{1}{\sin t}$

- f est continue sur $]0, 1]$
- Au voisinage de $t \to 0$,

$$f(t) = \frac{\ln t}{1+t} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{\ln t}{1} \quad \text{intégrable en } 0$$

donc f est intégrable en 0.

- g continue sur $]0, 1]$
- Au voisinage de $t \to 0$

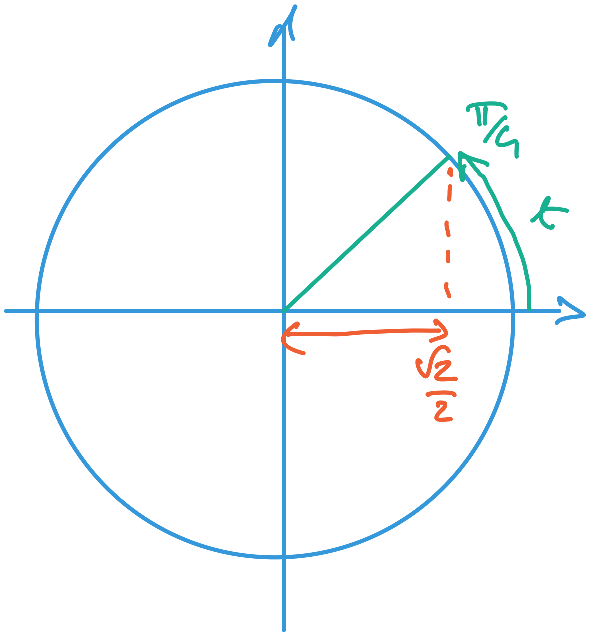
$$g(t) = \frac{\operatorname{Arctan} t}{t\sqrt{t}} \underset{0}{\sim} \frac{t}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{intégrable en } 0 \qquad \alpha = \frac{1}{2} < 1$$

donc g intégrable en 0

- h continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$
- Au voisinage de 0 $\quad \dfrac{1}{\sin t} \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{1}{t} \qquad \alpha = 1 \geq 1$

donc h non intégrable en 0.

Exemple. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}}\,\mathrm{d}t$.

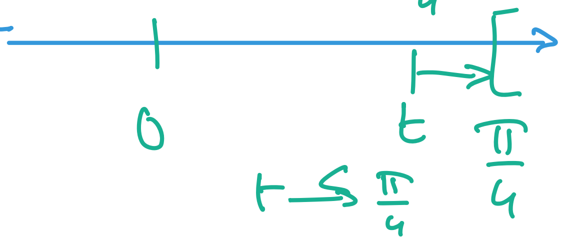


• $t \mapsto \dfrac{1}{\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}}$ continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right[$

• Au voisinage de $t \xrightarrow{<} \dfrac{\pi}{4}$

$u \xrightarrow{>} 0$

$t = \dfrac{\pi}{4} - u$



$t \xrightarrow{<} \dfrac{\pi}{4}$

$u \xrightarrow{>} 0$

$$f\left(\frac{\pi}{4} - u\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - u\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos u + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin u - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{(1 + o(u)) + (u + o(u)) - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{u + o(u)}$$

$\sim \dfrac{\sqrt{2}}{u}$ pas intégrable en 0

donc f non intégrable en $\dfrac{\pi}{4}$

or $f \geqslant 0$

donc $\displaystyle\int^{\to \pi/4} f(t)\,\mathrm{d}t$ divergente.

Ex $\displaystyle\int_0^1 |\ln t|^\alpha \, dt$

$f : t \mapsto (\ln t)^\alpha$ continue sur $]0, 1]$ si $\alpha \geq 0$

continue sur $]0,1[$ si $\alpha < 0$

$\alpha < 0$

$\alpha = -\beta$

Étude en 1 : Au voisinage de $t \underset{<}{\to} 1$

$u \underset{>}{\to} 0$

$$f(1-u) = \frac{1}{(\ln(1-u))^\beta}$$

$$\sim \frac{1}{(-u)^\beta}$$ intégrable ssi $\beta < 1$

i.e. $\alpha > -1$

Étude en 0 :

si $\alpha < 0$ $\quad f(t) = \left(\frac{1}{\ln t}\right)^\beta \xrightarrow[t \underset{>}{\to} 0]{} 0$

donc f se prolonge par continuité en 0

donc l'int. est faussement généralisée en 0.

Si $\alpha = 0$ $\quad f(t) = 1$ $\quad$ intégrable en 0

Si $\alpha > 0$

$$|(\ln t)|^\alpha = \left|\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right|^\alpha$$

$$= o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

car $\ln(x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^{1/2}\right)$

or $\frac{1}{\sqrt{t}}$ intégrable en 0

donc $|\ln t|^\alpha$ aussi

Méthode. On peut aussi procéder, pour des exemples un peu plus délicats, par **éclatement** : pour étudier la convergence d'une intégrale généralisée, on effectue un développement limité de son intégrande et on l'écrit comme somme de plusieurs termes, pour lesquels on étudie séparément la convergence de l'intégrale.

Exemple. Comment étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}\,dx$?

- $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}$ est continue sur $[4, +\infty[$

  car $\sqrt{x}+\sin x \geq 2-1>0$

- Au voisinage de $x \to +\infty$.

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

intégrable en $+\infty$?

Non $\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| \geq \left|\frac{\sin x}{x}\right|$

Zut !

- $$\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}^2}\right)\right)$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x}}_{\frac{1-\cos 2x}{2x}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)}_{\text{intégrable en } +\infty}$$

d'intégrale convergente par int. par parties

$$\int \frac{1}{x^{3/2}} \cos x$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$$

d'intégrale divergente

int. par parties d'intégrale cv.

3 int cv, 1 int divergente, donc l'intégrale diverge.

preuve : passage à la limite des e, int. partielles.

2.4 Propriétés

Linéarité. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur I, λ et μ deux scalaires. Si les intégrales généralisées $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors $\displaystyle\int_I \lambda f(t)+\mu g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_I \lambda f(t)+\mu g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$$

Corollaire. Si $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_I f(t)+g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Remarque. *Que penser de l'écriture :*

⚠

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t = \cancel{\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty}\frac{1}{(t+1)}\,\mathrm{d}t}\ ?$$

2 int divergentes

Positivité. Soit f une fonction cpm sur I d'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ convergente.

Si $\forall t\in I,\ f(t)\geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0$.

Croissance. Soit f et g deux fonctions cpm sur I, d'intégrales généralisées sur I convergentes.

Si $\forall t\in I,\ f(t)\leqslant g(t)$, alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque. *Pour les intégrales généralisées convergentes, lorsque $a>b$, on définit par convention :*

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

Relation de Chasles. Soit f une fonction continue par morceaux sur I, d'intégrale généralisée sur I convergente. Pour tous a,b,c éléments ou extrémités de I, on a :

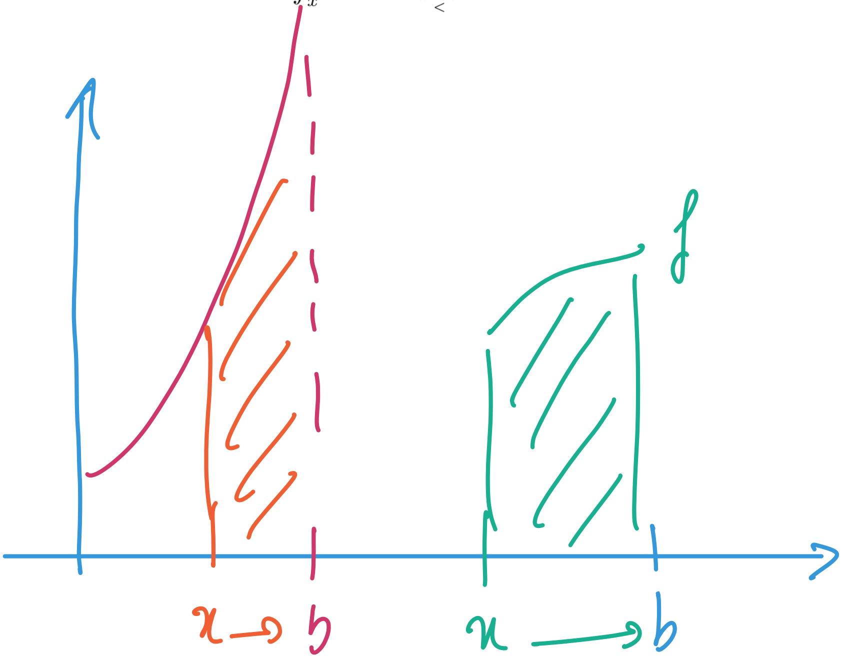
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec convergence des intégrales impliquées.

Proposition. Soit $f\ :\ [a,b[\ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, telle que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

Pour $x<b$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on l'appelle **reste** de l'intégrale convergente, et :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\substack{x\to b\\ <}]{} 0$$



2.5 Techniques de calcul d'une intégrale généralisée

2.5.1 Calcul par primitivation de l'intégrande

Théorème.

Soit f continue par morceaux sur $]a,b[$, dont on connaît une primitive F.
L'intégrale $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si F admet une limite finie ℓ_a en a à droite et une limite finie ℓ_b en b à gauche.
Dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_{t \overset{>}{\to} a}^{t \overset{<}{\to} b} = \ell_b - \ell_a$$

2.5.3 Intégration par parties

Théorème.

Si :

- f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$
- $f(t)g(t)$ admet des limites finies en a à droite et en b à gauche

Alors :

- les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature
- en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)g(t)\Big]_{t \overset{>}{\to} a}^{t \overset{<}{\to} b} - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

2.5.2 Changement de variable

Théorème.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$. Si $\varphi\,:\ ]\alpha, \beta[\, \to\,]a, b[$ est :

- une bijection
- strictement croissante
- de classe $\mathcal{C}^1$

alors

- les deux intégrales $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\to \alpha}^{\to \beta} (f \circ \varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature ;
- elles sont égales en cas de convergence.

3.4 Cas des fonctions positives, continues et intégrables

Théorème.

> Si f est positive, continue et intégrable, et $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est la fonction nulle sur I.

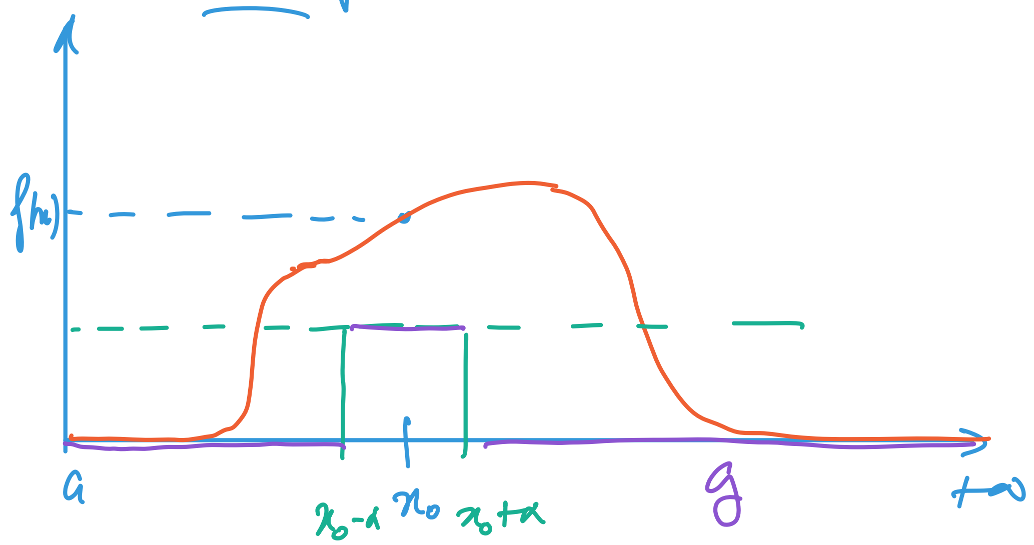
Remarque.

- *L'hypothèse de continuité est importante ici.*
- *Ce théorème est souvent utilisé pour montrer le caractère « défini-positif » d'un produit scalaire défini par une intégrale.*
- *On fera référence à ce théorème en parlant de « fonction continue, positive, d'intégrale nulle ».*

Par contraposée

Preuve :

$I = [a, +\infty[$



On suppose $f \neq 0$ i.e. $\exists\, x_0 \in [a,+\infty[$ tq $f(x_0) \neq 0$

Par déf de continuité en x_0, avec $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$

$\exists\, \alpha$ tq $\forall x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$, $f(x) \geq \dfrac{f(x_0)}{2}$

Donc, en notant $g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [x_0-\alpha, x_0+\alpha] \\ \dfrac{f(x_0)}{2} & \text{sinon} \end{cases}$

$\forall x \in [a, +\infty[, \quad g(x) \leq f(x)$

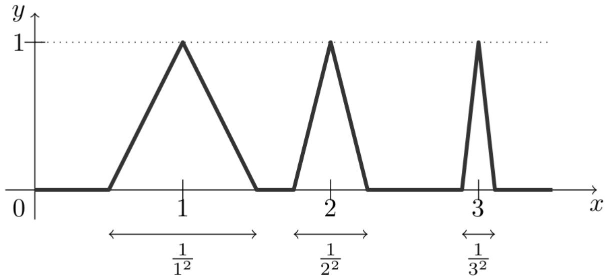
donc $0 < 2\alpha \dfrac{f(x_0)}{2} = \displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

5 Annexes

5.1 Annexe : une analogie trop séduisante avec les séries

Réfléchissons à la différence entre convergence et convergence absolue d'une intégrale généralisée, ainsi qu'à ces analogies avec les séries numériques, qui sont certes séduisantes, et auxquelles on pense tous. Voici deux exemples de fonctions définies par leur graphe :

1. Cette fonction est-elle intégrable ? A-t-elle une limite en $+\infty$?



$\frac{1}{2} \, 1 \qquad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \qquad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^3}$

$$\int_0^x f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$ fini

$$< +\infty$$

2. Cette fonction est-elle intégrable ? Son intégrale sur $[0, +\infty[$ est-elle convergente ?