Certification Pix

Pour mar : 64.27, 66.5

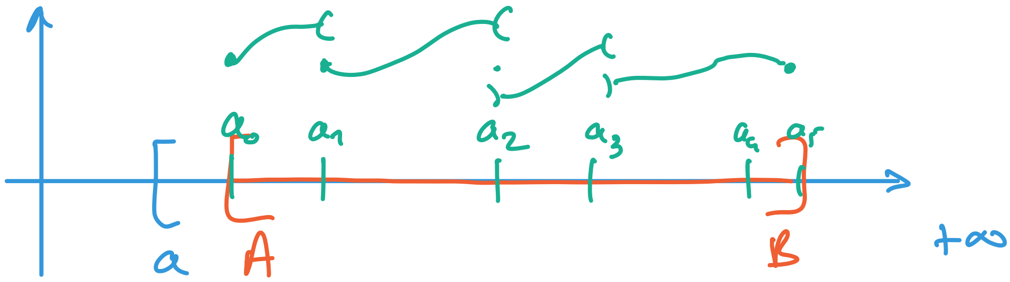
Intégration sur un intervalle quelconque

1 Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$

Dans cette section, a désigne un réel fixé.

1.1 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition. Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur I si et seulement si elle est continue par morceaux sur tout segment de I.



Exemple. Les fonctions suivantes sont-elles continues par morceaux sur l'intervalle $]0, 1]$?

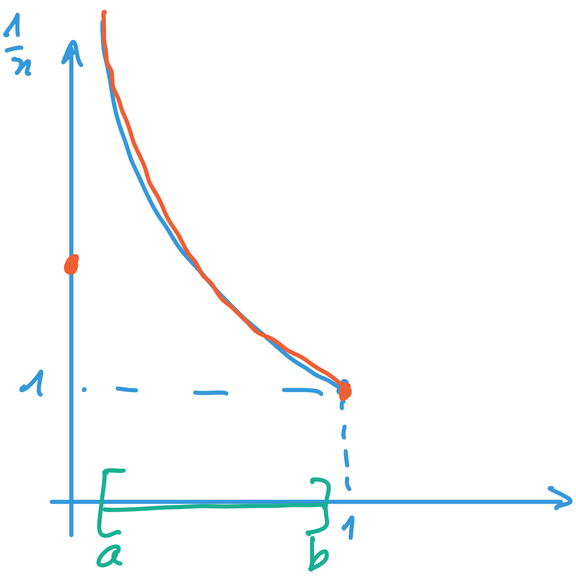
$f_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$

$f_2 : x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$

$f_3 : x \mapsto \sin \frac{1}{x}$

$f_4 : x \mapsto \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$

$f_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$



$g_1 : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0,1] \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

définie sur $[0,1]$

cpm sur $[0,1]$?

$\sigma = (a_0 = 0, a_1 \ldots)$

$g_1|_{]a_0, a_1[} \xrightarrow[x \to a_0]{} \text{lim finie}$

g_1 pas cpm sur $[0,1]$

f_2 sur $[a,b] \subset]0,1]$

f_2 continue sur $[a,b]$, donc cpm sur tout $[a,b] \subset]0,1]$

donc cpm sur $]0,1]$.

<u>Propriété</u> : <u>Si</u> f continue sur I intervalle,

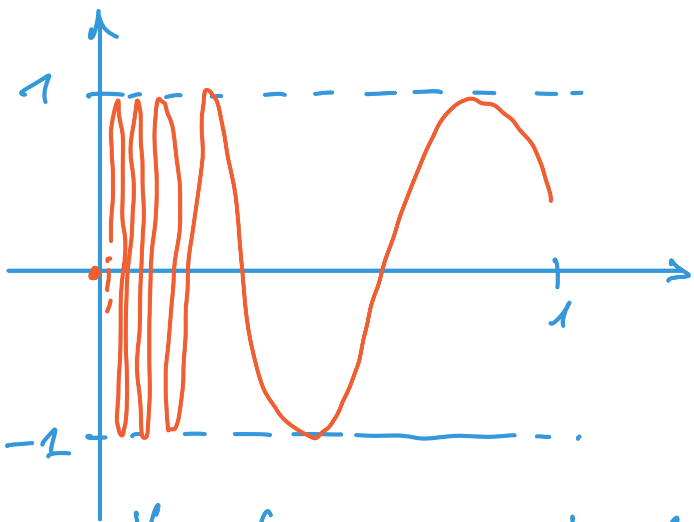
<u>alors</u> f cpm sur I.

$f_3 :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sin \frac{1}{x}$

$g_3 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$



$\forall \sigma = (a_0 = 0, a_1 \dots a_n)$ subd. de $[0,1]$,

$g_3|_{]a_0,a_1[}(x) = \sin \frac{1}{x}$

qui n'a pas de limite en 0 à droite

donc g_3 n'est pas cpm.

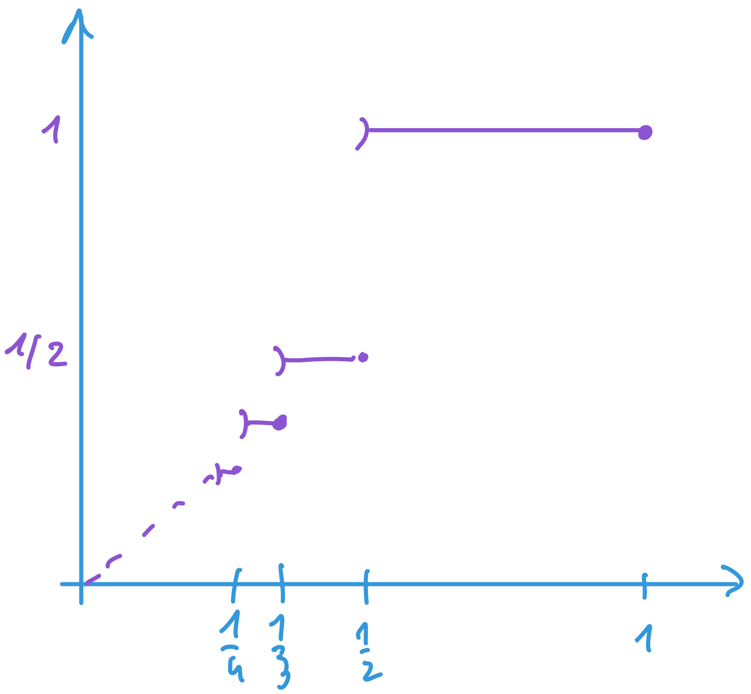
$f_4 : x \longmapsto \dfrac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$

1) prolonger f_4 par continuité en 0.

2) la fct prolongée est cpm sur $[0,1]$?

Pour $n \leq \frac{1}{x} < n+1$, $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = n$ donc $f_4(x) = \frac{1}{n}$

ie $\dfrac{1}{n+1} < x \leq \dfrac{1}{n}$



<u>Mque $f_4(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$</u>

$$\forall x \quad 0 \leq f_4(x) = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \leq \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{x}{1-x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

f_k prolongée cpm ~~sur~~ $[0,1]$ NON !

s'il y avait une subdivision adaptée, elle serait infinie.

Si $\sigma = (a_0, a_1 \dots a_n)$ convient, $f_k \Big|_{]a_0, a_1[}$ continue $\to$ faux.

f_k continue par morceaux sur $]0,1]$?

Soit $[a,b] \subset]0,1]$ $\quad (a>0)$

a est dans $]0,1]$, notons $p = \left\lfloor \frac{1}{a} \right\rfloor$

On note $a_0 = a$

$$a_1 = \frac{1}{p}$$

$$a_2 = \frac{1}{p-1}$$

$$\vdots$$

$$a_{p-1} = 1/2$$

$$a_p = 1$$

$\sigma = \left(a, \frac{1}{p}, \frac{1}{p-1}, \dots, \frac{1}{2}, 1\right)$ est une subdivision de $[a,1]$ adaptée à f_k car $\forall k$

$f_k \Big|_{]a_k, a_{k+1}[}$ est constante $= a_{k+1}$

Proposition. Les fonctions continues sont continues par morceaux.

Proposition. Les fonctions continues par morceaux sont localement bornées, i.e. :

$$\forall x_0 \in I,\ \exists \eta > 0 \text{ t.q. } f_{|]x_0-\eta,x_0+\eta[} \text{ bornée}$$

ou encore :

$$\forall x_0 \in I,\ \exists \eta > 0,\ \exists M \geqslant 0 \text{ t.q. } \forall x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[,\ |f(x)| \leqslant M$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt \quad ?$$

1.2 Intégrale convergente, intégrale divergente

Définition. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue (par morceaux). On dit que l'**intégrale généralisée** :

le truc $$\int_a^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$ $\sum_n u_n$

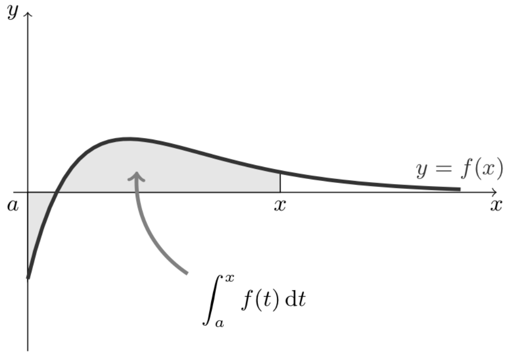
converge (ou existe) si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie ℓ lorsque $x \to +\infty$. Dans ce cas, on note :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \ell$$ $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

On dit que l'intégrale généralisée **diverge** sinon.

Remarque. *L'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pourrait être appelée « intégrale partielle » de l'intégrale généralisée.*

Interprétation géométrique :



Caractère local de la convergence. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. La convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\dots}^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas du choix dans $[a, +\infty[$ de la borne d'en bas.

Remarque. *Ainsi, on peut dès maintenant retenir que la convergence d'une intégrale généralisée en $+\infty$ dépend seulement du comportement de l'intégrande au voisinage de $+\infty$.*

Preuve: Soit $b \in \mathbb{R}$ tq f contin (par mcx) sur $[b, +\infty[$

$$\int_a^x f(t)\,dt = \underbrace{\int_a^b f(t)\,dt}_{\text{constante}} + \int_b^x f(t)\,dt$$

$x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ a une limite finie pour $x \to +\infty$

$\iff$ $x \mapsto \int_b^x f(t)\,dt$ a une limite finie pour $x \to +\infty$

Exemple. Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

Remarque. *Les techniques d'étude de convergence seront étudiées un peu plus loin, et consisteront principalement à comparer l'intégrande à des fonctions de références. Pour les exemples qui précèdent, on travaille sur l'intégrale partielle, en revenant à la définition, ce qui ne sera pas le réflexe à avoir. Il s'agit en effet d'exemples (rares en pratique) où l'on peut exprimer une primitive de l'intégrande à l'aide des fonctions usuelles.*

$$\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

• $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue (par ucx) sur $[1,+\infty[$

C'est une int généralisée en $+\infty$

• l'intégrale partielle est

$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ CV et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = 1$

$$\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

• $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue (par ucx) sur $[1,+\infty[$

• intégrale partielle : $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_1^x = \ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

donc l'intégrale est divergente

$$\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

$[\,2\sqrt{t}\,]$

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

• $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue (par ucx) sur $[1,+\infty[$

• intégrale partielle : $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$$= [\operatorname{Arctan} t]_0^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

div

$$\int_e^{\to+\infty} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$$

• $t \mapsto \frac{1}{t\ln t}$ continue (par mcx) sur $[e,+\infty[$

• int partielle : $\int_e^x \frac{1}{t\ln t}\,dt = \left[\ln(\ln t)\right]_e^x$

$= \ln(\ln x)$

$\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

donc l'intégrale est divergente.

$$\int_0^{\to+\infty} \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

• $t \mapsto e^{\alpha t}$ continue sur $[0,+\infty[$

• int. partielle $\int_0^x e^{\alpha t}\,dt = \left[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\right]_0^x$ pour $\alpha \neq 0$

$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha x}-1) \\ x & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$

a une limite finie pour $x \to +\infty$

ssi $\alpha < 0$

CCl : $\boxed{\int_0^{\to+\infty} e^{\alpha t}\,dt \text{ cv ssi } \alpha < 0}$

$$\int_0^{\to+\infty} \cos t\,\mathrm{d}t$$

1.3 Cas des fonctions positives

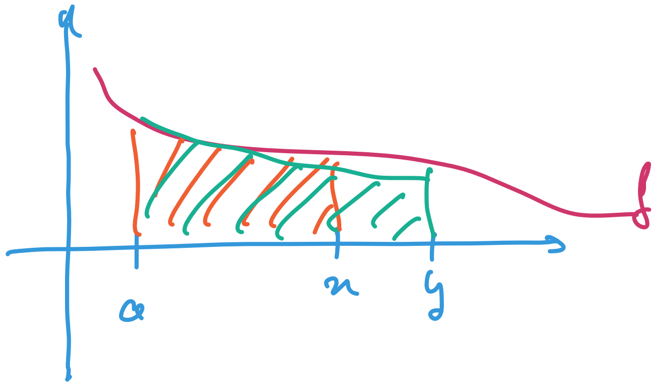
Lemme. Dans le cas où l'intégrande est à valeurs positives, l'intégrale généralisée $\int_a^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.

Remarque. *Lorsque f est positive, on autorise l'écriture $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$ en cas de divergence.*
Un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de la convergence de l'intégrale.

Preuve : $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est croissante sur $[a, +\infty[$.

Soit $x < y$

$F(y) = F(x) + \underbrace{\int_x^y f(t)\,dt}_{\geq 0}$



1.4 Primitive et intégrale généralisée

Proposition. Si f est continue sur $[a, +\infty[$, et que l'intégrale $\displaystyle\int^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale fonction de la borne d'en bas :

$$x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable, de dérivée $x \mapsto -f(x)$.

$$\text{"} \int_x^{+\infty} f(t)\,dt = -\int_{+\infty}^{x} f(t)\,dt \text{"}$$

<u>Preuve:</u> $$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt$$

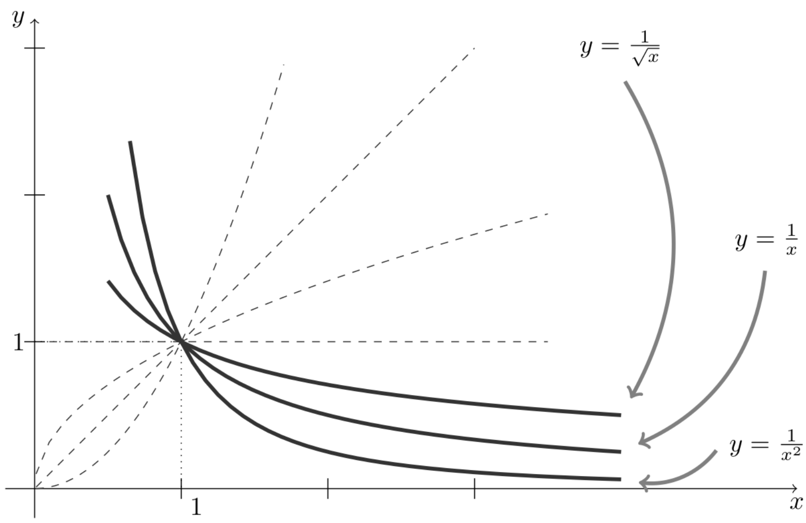
<u>Question?</u> est-ce qu'il y a une "divergence grossière" ?

2.3 Exemples de référence

Intégrales de Riemann en $+\infty$.

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ cv $\Longleftrightarrow \alpha > 1$



Exponentielle en $+\infty$.

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\to+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

3 Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Remarque. *Sauf mention contraire, I désigne un intervalle, et f une fonction continue par morceaux sur I.*

3.1 Convergence absolue d'une intégrale généralisée

$I = [a, +\infty[$

Définition. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Remarque. *L'intérêt de cette notion est de remplacer, lors de l'étude de la convergence d'une intégrale généralisée, l'intégrande par une fonction positive, ce qui donne accès aux théorèmes de convergence par comparaison, par équivalent, par comparaison asymptotique, et qui sont étudiés dans cette section.*

Théorème.

Soit f continue par morceaux sur I.
Si :

- $\displaystyle\int_I f$ converge absolument *i.e.* $\displaystyle\int_I |f|$ converge.

Alors :

- $\displaystyle\int_I f$ converge
- $\displaystyle\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$.

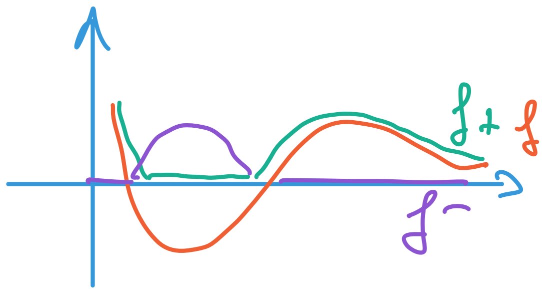
Remarque.

- *Il s'agit bien d'une condition suffisante, mais non nécessaire.*
  La convergence, et la non convergence absolue de $\displaystyle\int_1^{\to+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ *fournit un contre-exemple classique qu'il convient d'avoir à l'esprit.*
- *Pour une fonction positive, convergence et convergence absolue de l'intégrale sont des notions équivalentes.*

Preuve : 1er cas : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\qquad f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, cpm.

On note $f_+ = \mathrm{Max}(f, 0)$

$f_- = \mathrm{Max}(-f, 0)$



et on a $f = f_+ - f_-$

$|f| = f_+ + f_-$

On passe par les intégrales partielles

$$\int_a^x f_+(t)\,dt \leq \int_a^x |f|(t)\,dt$$

$$\leq \int_a^{+\infty} |f|(t)\,dt \quad \text{cste}$$

donc $\int_a^{+\infty} f_+$ est convergente (f_+ positive)

De même, $\int_a^{+\infty} f_-$ est convergente (f_- positive)

Par différence, $\underbrace{\int_a^{+\infty} f_+ - f_-}_{= \int_a^{+\infty} f}$ est convergente.

De plus: $\forall x \in [a, +\infty[$

$$\left| \int_a^x f(t)\,dt \right| \leq \int_a^x |f(t)|\,dt$$

À la limite pour $x \to +\infty$

$$\left| \int_a^{+\infty} f(t)\,dt \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt.$$

Ainsi : pour montrer la cv d'une intégrale, on peut montrer sa cv absolue.

2e cas : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$

$|\mathrm{Re} f| \leq |f|$ et $|\mathrm{Im} f| \leq |f|$

point de vue différent.

3.2 Intégrabilité d'une fonction

Définition. On dit que f est **intégrable sur** I lorsque f est continue par morceaux sur I et l'intégrale de f sur I est absolument convergente.

Remarque. *Lorsque l'on dit intégrable sur I, on parle donc d'une fonction, de l'intégrande d'une intégrale absolument convergente.*
Lorsque l'on dit absolument convergente, on parle d'une intégrale généralisée, dont l'intégrande est intégrable.
Pas de confusion : intégrable ne signifie pas que l'on peut simplement considérer l'intégrale de la fonction.
Pas de confusion : intégrable ne signifie pas primitivable.

Exemples de référence.

- $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$;
- $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 0$.

3.3 Techniques d'étude

Remarque. *Dans la pratique, pour justifier qu'une intégrale généralisée converge, on étudie sa convergence absolue en utilisant l'un des théorèmes de ce paragraphe. On identifie la (ou les) bornes de l'intervalle où l'intégrale est généralisée en précisant la continuité (par morceaux) de l'intégrande, et on se place sur un voisinage de cette borne (on fait deux études distinctes si l'intégrale est doublement généralisée). L'idée est de comparer l'intégrande à une fonction de référence, la comparaison devant être « raisonnable » sur ce voisinage.*
L'étude se fait donc sur l'intégrande, et non l'intégrale elle-même. C'est pour cette raison que les résultats sont énoncés en termes de fonctions intégrables.

Commençons par énoncer le théorème dans le cas où $I = [a, +\infty[$. On considère f, g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$.

Théorème.

Si $|f| \leqslant |g|$ et g intégrable sur $[a, +\infty[$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

Théorème.

Si $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{O}(g(x))$ et g intégrable sur $[a, +\infty[$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

Remarque. *Ce résultat s'utilise en particulier lorsque $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}(g(x))$.*

Théorème.

Si $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x)$ et g intégrable sur $[a, +\infty[$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

Proposition. Précisons aussi que, dans le cas où f et g sont telles que $0 \leqslant |f| \leqslant |g|$ et f non intégrable sur $[a, +\infty[$, alors g n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

Preuve : par les intégrales partielles

$\forall x \quad \int_a^x |f(t)|\,dt \leq \int_a^x |g(t)|\,dt$

$\leq \int_a^{+\infty} |g(t)|\,dt$ cste

or $|f| \geq 0$ donc $\int_a^{\to +\infty} |f|$ est convergente

Exemple. Étudier l'intégrabilité sur un voisinage de $+\infty$ des fonctions suivantes :

$t \mapsto \dfrac{\cos t}{1+t^2}$

• $t \mapsto \dfrac{\cos t}{1+t^2}$ cpm sur $[0,+\infty[$

• Au voi de $+\infty$: $\left|\dfrac{\cos t}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$

ou : $\dfrac{\cos t}{1+t^2} = \dfrac{O(1)}{1+t^2} = O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ intégrable en $+\infty$

$t \mapsto \dfrac{2t}{1+t^3}$

• $t \mapsto \dfrac{2t}{1+t^3}$ est continue (par mcx) sur $[0,+\infty[$

• Au voi de $+\infty$ $\dfrac{2t}{1+t^3} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{t^2}$ intégrable en $+\infty$

$t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$

$t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est continue (par mcx) sur $[0,+\infty[$

• Au voisinage de $+\infty$.

exp ↘

$e^{-\alpha t}$ $\alpha > 0$

$e^{-\ln t} = \dfrac{1}{t}$

$e^{-2\ln t} = \dfrac{1}{t^2}$

$$e^{-\sqrt{t}} = e^{-\sqrt{t}+2\ln t}\, e^{-2\ln t}$$

$$= \underbrace{e^{-\sqrt{t}+2\ln t}}_{o(1)} \times \frac{1}{t^2} \qquad \text{car } -\sqrt{t} \gg 2\ln t$$

$$= o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{intégrable en } +\infty$$

$t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{1+t}$

• $t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{1+t}$ est continue (par mcx) sur $[0,+\infty[$

• Au voisinage de $+\infty$: $\dfrac{\sqrt{t}}{1+t} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{t}}{t} = \dfrac{1}{t^{1/2}}$ $\quad \frac{1}{2} \leq 1$

non intégrable en $+\infty$

donc $t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{1+t}$ non intégrable en $+\infty$

donc $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t}$ ne cv pas absolument

donc $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t}$ ne cv pas par positivité de $\dfrac{\sqrt{t}}{1+t}$

$t \mapsto \dfrac{1}{t^2 \ln t}$

$$\frac{1}{t^2 \ln t} = \frac{1}{t^2} \cdot o(1) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

2.5 Techniques de calcul d'une intégrale généralisée

2.5.1 Calcul par primitivation de l'intégrande

Ce premier théorème est une conséquence directe de la définition.
Il s'applique lorsque l'on sait exprimer une primitive de l'intégrande.

Théorème.

Soit f continue par morceaux sur $]a, b[$, dont on connaît une primitive F.
L'intégrale $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si F admet une limite finie ℓ_a en a à droite et une limite finie ℓ_b en b à gauche.
Dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_{t \gtrsim a}^{t \lesssim b} = \ell_b - \ell_a$$

Remarque. *La convergence de l'intégrale est justifiée a posteriori par l'existence de limites finies du « crochet ».*

Exemple. Étudier la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3t+2}$.

Th f cpm $[a, +\infty[$, F une primitive de f
sous réserve de limite finie du crochet,

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \big[F(t)\big]_a^{t\to+\infty}$$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3t+2}$.

- $t^2+3t+2 = (t+2)(t+1)$

donc $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2+3t+2} = \dfrac{1}{t+1} - \dfrac{1}{t+2}$

continue (par mcx) sur $[0, +\infty[$

- sous réserve de limite finie du crochet :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+3t+2} = \big[\ln(t+1) - \ln(t+2)\big]_0^{t\to+\infty}$$

$$= \left[\ln\left(\frac{t+1}{t+2}\right)\right]_0^{+\infty}$$

$$= \ln 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \ln 2$$

donc l'intégrale est cv et sa valeur est $\ln 2$.

2.5.3 Intégration par parties

Terminons par une formule elle aussi importante, qu'il faut appliquer avec précaution pour les intégrales généralisées. Elle est en particulier utile pour établir une relation de récurrence satisfaite par une intégrale dépendant de n.

Théorème.

Si :

- f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$
- $f(t)g(t)$ admet des limites finies en a à droite et en b à gauche

Alors :

- les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature
- en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)g(t)\Big]_{t \overset{>}{\to} a}^{t \overset{<}{\to} b} - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. *Il convient de savoir justifier une intégration par parties par une utilisation précise du théorème précédent. Néanmoins, lorsqu'il s'agit d'un simple calcul, on ne vérifie pas les hypothèses de régularité. Dans la pratique, on écrit :*

$$\int_a^b \overset{\nearrow}{u}(t)\underset{\searrow}{v}(t)\,\mathrm{d}t = [U(t)v(t)]_a^b - \int_a^b U(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

en s'assurant que le « crochet » a des limites finies. La flèche montante symbolise la primitivation, et la flèche descendante la dérivation. U désigne une primitive de u.
La convergence de l'intégrale est justifiée a posteriori par les limites finies du « crochet » et la convergence de la nouvelle intégrale.

Exemple. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Théorème :

• Si ~~f, g $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$~~

et si $f(t)g(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$

Alors : $\displaystyle\int_a^{\to +\infty} f'(t)g(t)$ et $\displaystyle\int_a^{\to +\infty} f(t)g'(t)$

sont de même nature

et, en cas de cv

$$\int_a^{+\infty} f'g = [f(t)g(t)]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} fg'$$

En pratique :

"par intégration par parties"

"sous réserve de limite finie finie du crochet

et de cv de l'intégrale"

$$\int_a^{+\infty} \underbrace{u(t)}_{\downarrow} \overbrace{v(t)}^{\nearrow} \, dt$$

$$= \left[u(t)\, V(t)\right]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u'(t)\, V(t)\, dt$$

Exemple. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{\to+\infty} \cos(\omega t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. et valeur

- $t \mapsto \cos(\omega t) e^{-t}$ continue sur $[0, +\infty[$
- Au vois de $+\infty$ $\quad \cos(\omega t)\, e^{-t} = O(1)\, e^{-t}$

$$= O(e^{-t})$$

où $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable en $+\infty$.

- Calcul de l'intégrale :

M1. par intégration par parties

sous réserve de limite finie du crochet :

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\cos(\omega t)}_{\searrow} \overbrace{e^{-t}}^{\nearrow} \, dt$$

$$= \left[\cos(\omega t)(-)e^{-t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-)\omega \sin \omega t \, (-) e^{-t} \, dt$$

$$= 0 + 1 - \omega \int_0^{+\infty} \sin \omega t \, e^{-t} \, dt$$

$$= 1 - \omega \left[\sin(\omega t)(-)e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \omega \int_0^{+\infty} \omega \cos(\omega t)(-)e^{-t} dt$$

$$= 1 - \omega^2 \int_0^{+\infty} \cos(\omega t) e^{-t} \, dt$$

donc $$\int_0^{+\infty} \cos(\omega t) e^{-t} = \frac{1}{1+\omega^2}$$

M2 Notons, $g(t) = e^{i\omega t} e^{-t}$

$\hookrightarrow f(t) = \mathrm{Re}(g(t))$

- $t \mapsto g(t)$ continue sur $[0,+\infty[$
- Au voisinage de $+\infty$

$$|g(t)| = e^{-t} \quad \text{intégrable en } +\infty$$

- $$\int_0^{+\infty} g(t) \, dt = \int_0^{+\infty} e^{(i\omega - 1)t} \, dt$$

$$= \left[\frac{1}{-1+i\omega} e^{(i\omega-1)t}\right]_0^{+\infty}$$

$$\left|e^{(i\omega-1)t}\right| = e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

$$= 0 - \frac{1}{-1+i\omega}$$

$$= \frac{1}{1-i\omega}$$

$$= \frac{1+i\omega}{1+\omega^2}$$

donc $\mathrm{Re}(\ ) = \dfrac{1}{1+\omega^2}$

Exemple. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$.

Idée : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt = \left[t^n (-) e^{-t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} n t^{n-1} (-) e^{-t}\, dt$

- la $t \mapsto t^n e^{-t}$ continue (par morc) sur $[0,+\infty[$

  Au vois de $+\infty$

  $$t^n e^{-t} = o(e^{\frac{t}{2}}) \cdot e^{-t}$$
  $$= o(e^{-t/2}) \quad \text{intégrable en } +\infty$$

  donc I_n est une intégrale abs. convergente.

- Par intégration par parties

  sous réserve de limite finie du crochet :

  $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$ pour $n \geq 1$

$$= \left[t^n (-) e^{-t} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} n t^{n-1} (-) e^{-t} dt$$

$$= 0 - 0 + n I_{n-1}$$

Avec $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$

$$= \left[- e^{-t} \right]_0^{+\infty}$$

$$= 1$$

donc par récurrence, $I_n = n!$

2.5.2 Changement de variable

Le théorème du changement de variable est une technique efficace, et la formule doit pouvoir être utilisée « dans les deux sens ». L'entrainement permet d'avoir l'initiative de certains changements de variable classiques.

Le théorème est présenté pour le cas d'un intervalle ouvert, pour l'étude de $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$, mais se transpose aux cas d'un intervalle semi-ouvert, et bien-sûr au cas d'un segment.

Théorème.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$. Si $\varphi\,:\;]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est :

- une bijection
- strictement croissante
- de classe $\mathcal{C}^1$

alors

- les deux intégrales $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\to \alpha}^{\to \beta} (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature ;
- elles sont égales en cas de convergence.

Remarque. *La convergence de l'intégrale est justifiée a posteriori par le changement de variable et la convergence de la nouvelle intégrale.*

Remarque. *Dans la pratique, on dit que l'on effectue le changement de variable $t=\varphi(u)$ et l'on écrit :*

$$\begin{array}{rcl} t & \textit{devient} & \varphi(u) \\ \mathrm{d}t & \textit{devient} & \varphi'(u)\,\mathrm{d}u \\ t \text{ de } a \text{ à } b & \textit{devient} & u \text{ de } \alpha \text{ à } \beta \end{array}$$

Remarque. *On peut adapter ce résultat au cas où φ est strictement décroissante.*

$$\begin{array}{rcl} t & \textit{devient} & \varphi(u) \\ \mathrm{d}t & \textit{devient} & \varphi'(u)\,\mathrm{d}u \\ t \text{ de } a \text{ à } b & \textit{devient} & u \text{ de } \beta \text{ à } \alpha \end{array}$$

Remarque. *Il convient de savoir justifier un changement de variable par une utilisation précise du théorème précédent. Néanmoins, lorsqu'il s'agit d'un simple calcul, ou pour des changements de variable très simples, notamment affines, on ne précise pas les hypothèses de régularité.*

Exemple. Convergence et calcul de $(\alpha>0)$:

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^{10}+1}\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$

4. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$